

# **Beitrag zur Theorie der Fokussierung ebener elastischer Kompressionswellen durch sphärische Festkörper**

Doktorarbeit  
zur Erlangung des Grades  
Doktor-Ingenieur  
der Abteilung für Maschinenbau  
der Ruhr-Universität Bochum

von  
KLAUS MÜLLER  
aus Witten/Ruhr

Bochum 1976



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

**Beitrag zur Theorie der Fokussierung  
ebener elastischer Kompressionswellen  
durch sphärische Festkörper**

Doktorarbeit  
zur Erlangung des Grades  
Doktor-Ingenieur  
der Abteilung für Maschinenbau  
der Ruhr-Universität Bochum

von  
KLAUS MÜLLER  
aus Witten/Ruhr

Bochum 1976



Doktorarbeit eingereicht am: 20. Oktober 1976  
Tag der mündlichen Prüfung : 17. Dezember 1976  
Referent : Prof. Dr. rer. nat. A. Ziegler  
Korreferent : Prof. Dr.-Ing. A. Kanarachos

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Angestellter bzw. Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Reaktortechnik im Institut für Energietechnik der Ruhr-Universität Bochum.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. A. Ziegler, dem Inhaber des Lehrstuhls für Reaktortechnik, danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, für sein stetes Interesse und für großzügige Förderung.

Herrn Prof. Dr.-Ing. A. Kanarachos gilt mein Dank für die Übernahme des Korreferates.

Ferner möchte ich allen Mitarbeitern des Lehrstuhles, die mich bei der Anfertigung der Arbeit unterstützten, für ihre stete Einsatzbereitschaft danken.

Bochum, Dezember 1976

Klaus Müller



Inhaltsverzeichnis:

|                                                                                                                                                                                                         | <u>Seite</u> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1. Einleitung                                                                                                                                                                                           | 1            |
| 2. Problemstellung                                                                                                                                                                                      | 5            |
| 3. Mathematische Behandlung                                                                                                                                                                             | 7            |
| 3.1 Grundgleichungen                                                                                                                                                                                    | 7            |
| 3.2 Lösung der Wellengleichung in Kugelkoordinaten                                                                                                                                                      | 17           |
| 3.3 Lösungsansätze zur Bestimmung der auftretenden Wellen                                                                                                                                               | 25           |
| 3.4 Bestimmung des Verschiebungsvektors $\vec{u}$ und des Spannungstensors $\tau_{ij}$ als Funktion der Potentialfunktionen $\phi$ und $\chi$ in Kugelkoordinaten                                       | 29           |
| 3.5 Bestimmung der Verschiebungen und Spannungen innerhalb und außerhalb der Kugel                                                                                                                      | 33           |
| 3.6 Bestimmung der Konstanten $A_n, B_n, C_n$ und $D_n$                                                                                                                                                 | 42           |
| 4. Numerische Auswertung                                                                                                                                                                                | 46           |
| 4.1 Das FORTRAN-IV Programm SPELAK                                                                                                                                                                      | 46           |
| 4.2 Berechnung der Legendre-Polynome $P_n(\cos \vartheta)$ , der Ableitung $\frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta}$ sowie des Produktes $\cot \vartheta \cdot \frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta}$ | 50           |

|                                                                                                                                                                 | <u>Seite</u> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 4.3 Berechnung der sphärischen<br>Besselfunktion $j_n(x)$ und der<br>sphärischen Neumannfunktion $y_n(x)$                                                       | 52           |
| 5. Ergebnisse                                                                                                                                                   | 55           |
| 6. Zusammenfassung der Ergebnisse<br>und Diskussion im Hinblick auf<br>die Erzeugung lokaler Spannungs-<br>spitzen mit Hilfe eines schall-<br>optischen Systems | 64           |

Literaturverzeichnis

Anhang mit den Abbildungen 7 bis 63.

## 1. Einleitung

Bei der Beurteilung der Sicherheit einer Kernkraftwerksanlage wird zugrundegelegt, daß ein Bersten des Reaktordruckbehälters aufgrund einer sicheren Festigkeitsberechnung, einer äußerst sorgfältigen Fertigung sowie regelmäßiger Wiederholungsprüfungen ausgeschlossen werden kann. Dabei ist der Zeitraum zwischen zwei Wiederholungsprüfungen so festgelegt, daß ein bei der letzten Wiederholungsprüfung noch nicht entdeckter Riß im Reaktordruckbehälter auf keinen Fall innerhalb der folgenden Betriebsperiode die kritische Rißlänge erreicht. Um das Rißwachstum zuverlässig abschätzen zu können, ist die Kenntnis der Duktilität des Werkstoffes von entscheidender Bedeutung. Bei verformungsfähigen Werkstoffen bewirkt ein örtliches Überschreiten der Elastizitätsgrenze lediglich ein örtliches Fließen. Solange sich ein solches örtliches Fließen nur auf kleine Bereiche erstreckt und dabei bestimmte Grenzen nicht überschreitet, besteht keine Gefährdung, da die unmittelbar benachbarten noch zähen Zonen ihrerseits ein haltloses Fließen eindämmen. Bei einem spröden Werkstoff hingegen führt eine örtliche Spannungsspitze direkt zum Bruch. Erzeugt man nun in einem Werkstoff an einem definierten Ort eine so hohe Zugspannung, daß lokal die Streckgrenze überschritten wird, dann könnte dort bei einem bereits versprödeten Werkstoff eine Gefügelockerung bzw. Rißbildung auftreten, die dann zum Beispiel durch Ultraschallprüfung nachzuweisen wäre.

Seit langem ist bekannt, daß akustische Wellen ebenso wie optische Wellen fokussiert werden können. So sind in der Arbeit von Tarnoczy /1/ neben zahlreichen Literaturhinweisen auch verschiedene Möglichkeiten angegeben, Schallwellen mit Wellenleitern oder akustischen Linsen zu fokussieren. Godo /2/ und Toulis /3/ veröffentlichten experimentelle Arbeiten zur Fokussierung ebener Wellen mit Hilfe akusti-



die Welle gebrochen, und es bildet sich unter der Voraussetzung einer kleineren Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_2$  im Medium 2 eine gekrümmte Wellenfront aus, in deren Fokusbereich lokal begrenzte Spannungsspitzen zu erwarten sind.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, grundlegende Aussagen über die Möglichkeit der Erzeugung lokaler Spannungsspitzen in elastischen Festkörpern durch Fokussierung einer ebenen elastischen Welle zu machen. Da für die in Abbildung 1 vorgegebene Geometrie des schalloptischen Systems eine analytische Bestimmung des Spannungsfeldes nicht möglich ist, wird das reale System durch ein geeignetes Modell mit einer dem realen System nahekommenden Geometrie ersetzt.

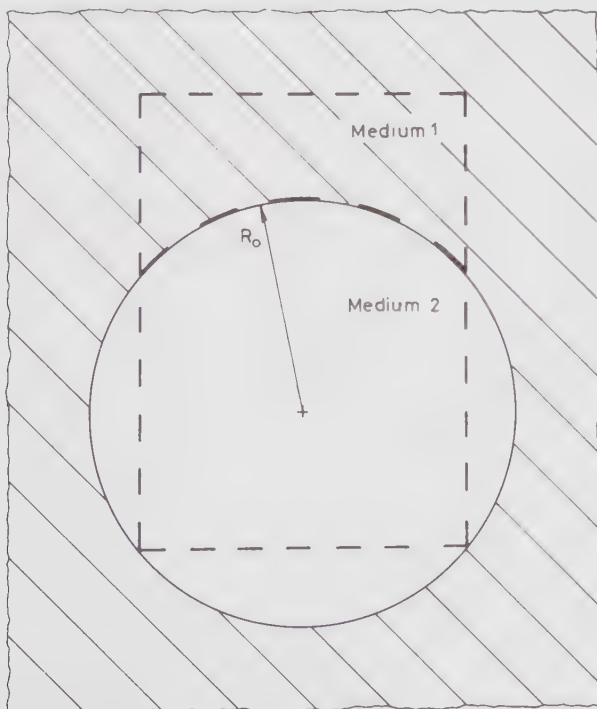


Abb. 2: Zusammenhang zwischen dem realen schalloptischen System (gestrichelte Linien) und dem der Betrachtungen zugrundegelegten Modell (durchgezogene Linien)

Das Modell besteht aus einer elastischen Kugel mit dem Radius  $R_0$ , die in ein unendlich ausgedehntes elastisches Medium eingebettet ist. Nach einer von Pao und Mow /6/ angegebenen Theorie wird für dieses Modell analytisch das Spannungsfeld im Inneren der Kugel unter dem Einfluß einer ebenen harmonischen Kompressionswelle bestimmt. Wie in Abbildung 2 gezeigt ist, kann das den Rechnungen zugrundegelegte Modell als Erweiterung des realen schalloptischen Systems aufgefaßt werden. Obwohl diese Erweiterung zu zusätzlichen Reflexionen des Wellenfeldes innerhalb der Kugel an der rückwärtigen Grenzfläche führt und Randstörungen infolge der endlichen Geometrie der realen Anordnung nicht berücksichtigt werden, können anhand der Rechenergebnisse für das Modell wesentliche Aussagen für das reale schalloptische System gemacht werden.

## 2. Problemstellung

In ein unendlich ausgedehntes Medium 1 mit den Lamé'schen Konstanten  $\lambda_1, \mu_1$  und der Dichte  $\rho_1$  sei als Medium 2 eine elastische Kugel mit dem Radius  $R_0$ , den Lamé'schen Konstanten  $\lambda_2, \mu_2$  und der Dichte  $\rho_2$  eingebettet. Der Mittelpunkt der Kugel befinde sich im Ursprung eines kartesischen  $xyz$ -Koordinatensystems. Auf diese Kugel möge, wie in Abbildung 3 gezeigt, eine ebene harmonische elastische Kompressionswelle treffen, die sich in positiver  $z$ -Richtung ausbreitet.

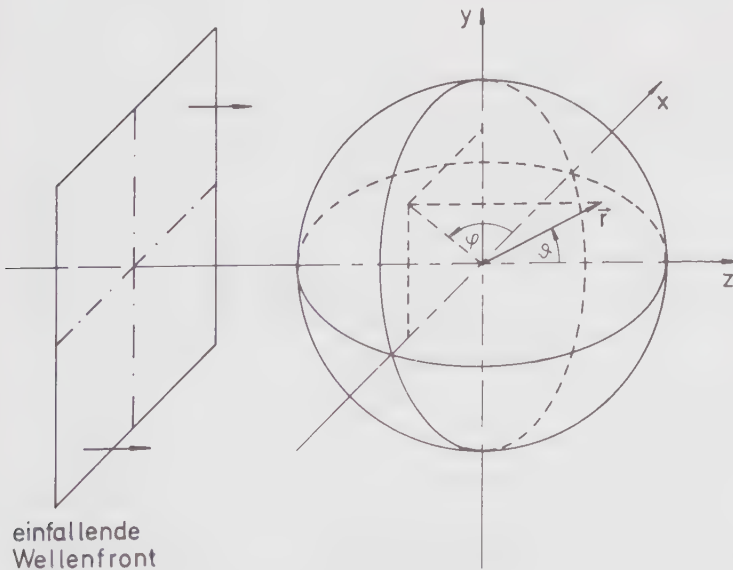


Abb. 3: Darstellung der Geometrie

Trifft die einfallende Welle auf die Kugeloberfläche, dann entstehen, wie zum Beispiel Kolsky /7/ gezeigt hat, an dieser Grenzfläche

- durch Reflexion eine Kompressions- und eine Scherwelle, die beide in das unendlich ausgedehnte Medium hineinlaufen;
- durch Brechung eine Kompressions- und eine Scherwelle, die sich im Inneren der elastischen Kugel ausbreiten.

Die Aufgabe besteht nun darin, mit Hilfe der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie die Wellen innerhalb der Kugel zu bestimmen und aus diesen die mechanischen Spannungen zu ermitteln.

### 3. Mathematische Behandlung

#### 3.1 Grundgleichungen

Nach Achenbach /8/ wird das Verschiebungsfeld in einem isotropen elastischen Medium durch die Gleichung

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla\cdot\vec{u} - \mu\nabla\times\nabla\times\vec{u} = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} \quad (3-1.1)$$

beschrieben. Hierin bedeuten

- $\lambda, \mu$     Lamé'sche Konstanten,
- $\vec{u}$         Verschiebungsvektor,
- $\rho$         Dichte,
- $t$         Zeitkoordinate,
- $\nabla$         Nabla-Operator.

Gleichung (3-1.1) läßt sich in eine einfachere Form überführen, indem man nach Helmholtz den Verschiebungsvektor  $\vec{u}$  als Summe des Gradienten einer Skalarfunktion  $\phi$  und der Rotation eines divergenzfreien Vektors  $\vec{\psi}$  darstellt.

$$\vec{u} = \nabla\phi + \nabla\times\vec{\psi} \quad (3-1.2)$$

$$\nabla\cdot\vec{\psi} = 0 \quad (3-1.3)$$

Durch Einsetzen der Gleichung (3-1.2) in Gleichung (3-1.1) ergibt sich unter Beachtung der Gleichung (3-1.3) sowie der Vektoridentitäten

$$\nabla \times \nabla \times \vec{u} \equiv \nabla \nabla \cdot \vec{u} - \nabla^2 \vec{u} \quad (3-14)$$

$$\nabla \nabla \phi \equiv \nabla^2 \phi \quad (3-15)$$

$$\nabla \nabla \times \vec{\psi} \equiv 0 \quad (3-16)$$

die Beziehung

$$\nabla [c_k^2 \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}] + \nabla \times [c_s^2 \nabla^2 \vec{\psi} - \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2}] = 0 \quad (3-17)$$

mit

$$c_k^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (3-18)$$

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (3-19)$$

Da die Funktionen  $\phi$  und  $\vec{\psi}$  voneinander unabhängig sind, muß in Gleichung (3-1.7) jeder Summand gleich Null sein. Dies führt auf die Beziehungen

$$\nabla [c_k^2 \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}] = 0 \quad (3-1.10)$$

und

$$\nabla \times [c_s^2 \nabla^2 \vec{\psi} - \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2}] = 0 \quad (3-1.11)$$

Gleichung (3-1.10) ist stets dann erfüllt, wenn die Funktion  $\phi$  eine Lösung der skalaren Wellengleichung

$$c_k^2 \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (3-1.12)$$

ist.

Das Verschiebungsfeld in einem isotropen elastischen Festkörper ist damit durch die Angabe einer Skalarfunktion  $\phi$ , die die Gleichung (3-1.12) erfüllt, und einer Vektorfunktion  $\vec{\Psi}$ , die der Gleichung (3-1.11) genügt, bestimmt. Gleichung (3-1.12) beschreibt die Ausbreitung einer Kompressionswelle mit der Geschwindigkeit  $c_k$ , während Gleichung (3-1.11) die Ausbreitung einer Scherwelle mit der Geschwindigkeit  $c_s$  angibt.

Wegen der Divergenzfreiheit des Vektors  $\vec{\Psi}$  sind nur zwei der drei Komponenten des Vektors  $\vec{\Psi}$  voneinander unabhängig. Für die Formulierung der Randbedingungen in einem orthogonalen Koordinatensystem mit den Achsen  $\xi_1, \xi_2$  und  $\xi_3$  ist es zweckmäßig, die beiden unabhängigen Komponenten des Vektors  $\vec{\Psi}$  normal und tangential zu einer Koordinatenfläche  $\xi_1 = \text{const.}$  zu wählen:

$$\vec{\Psi} = \vec{e}_1(\omega\theta) + \nabla \times (\vec{e}_1 \omega X) \quad (3-1.13)$$

Hierin sind  $\theta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$  und  $X(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$  noch zu bestimmende Skalarfunktionen,  $\omega = \omega(\xi_1)$  eine Funktion der Ortskoordinate  $\xi_1$  und  $\vec{e}_1$  der Einheitsvektor in  $\xi_1$ -Richtung.

Gleichung (3-1.11) ist erfüllt, wenn jede Komponente des Vektors  $\vec{\Psi}$  dieser Gleichung genügt. Mit der Beziehung (3-1.13) erhält man damit als Bestimmungsgleichungen für

die Funktionen  $\Theta$  und  $\chi$  die Beziehungen

$$\nabla \times [c_s^2 \nabla^2 (\vec{e}_1 \omega \Theta) - \vec{e}_1 \omega \ddot{\Theta}] = 0 \quad (3-1.14)$$

$$\nabla \times [c_s^2 \nabla^2 \{ \nabla \times (\vec{e}_1 \omega \chi) \} - \nabla \times (\vec{e}_1 \omega \ddot{\chi})] = 0 \quad (3-1.15)$$

Zur Bestimmung der unbekannten Skalarfunktion  $\Theta$  wird die Vektoridentität

$$\nabla^2 (\vec{e}_1 \omega \Theta) \equiv \nabla \nabla \cdot (\vec{e}_1 \omega \Theta) - \nabla \times \nabla \times (\vec{e}_1 \omega \Theta) \quad (3-1.16)$$

herangezogen. In einem orthogonalen Koordinatensystem mit den Maßstabsfaktoren  $h_1$ ,  $h_2$  und  $h_3$  für das Linienelement gelten die Beziehungen

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{e}_1 \omega \Theta) = \nabla \left[ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} (h_2 h_3 \omega \Theta) \right] \quad (3-1.17)$$

und

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times (\vec{e}_1 \omega \Theta) &= \\ &= -\vec{e}_1 \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[ \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 \omega \Theta)}{\partial \xi_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left[ \frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial (h_1 \omega \Theta)}{\partial \xi_3} \right] \right\} + \\ &\quad + \vec{e}_2 \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[ \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 \omega \Theta)}{\partial \xi_2} \right] + \\ &\quad + \vec{e}_3 \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[ \frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial (h_1 \omega \Theta)}{\partial \xi_3} \right] \end{aligned} \quad (3-1.18)$$

Bei der Verwendung von Kugelkoordinaten  $\xi_1 = r$ ,  $\xi_2 = \varphi$ ,  $\xi_3 = \vartheta$  gilt für die Maßstabsfaktoren des Linienelementes

$$h_1 = 1 \quad (3-1.19)$$

$$h_2 = r \sin \vartheta \quad (3-1.20)$$

$$h_3 = r \quad (3-1.21)$$

Bei konstantem  $h_1$  und einem von  $\xi_1 = r$  unabhängigen Verhältnis  $h_3/h_2$  können die Gleichungen (3-1.17) und (3-1.18) zu

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \vec{e}_1 \omega \Theta) &= \frac{1}{h_1} \nabla \left[ \frac{\omega \Theta}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2 h_3}{\partial \xi_1} \right] \\ &+ \vec{e}_1 \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial \omega \Theta}{\partial \xi_1} \\ &+ \vec{e}_2 \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\partial \omega \Theta}{\partial \xi_1} \\ &+ \vec{e}_3 \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \frac{\partial \omega \Theta}{\partial \xi_1} \end{aligned} \quad (3-1.22)$$

und

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \nabla \times (\vec{e}_1 \omega \Theta) &= \\
 &= -\vec{e}_1 \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[ \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \omega \Theta}{\partial \xi_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left[ \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \omega \Theta}{\partial \xi_3} \right] \right\} \\
 &\quad + \vec{e}_2 \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial \omega \Theta}{\partial \xi_2} \\
 &\quad + \vec{e}_3 \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial \omega \Theta}{\partial \xi_3}
 \end{aligned} \tag{3-1.23}$$

vereinfacht werden. Nach geeignetem Umstellen der Identität

$$\begin{aligned}
 \nabla^2(\omega \Theta) &\equiv \\
 &\equiv \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \omega \Theta}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \omega \Theta}{\partial \xi_2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \omega \Theta}{\partial \xi_3} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3-1.24}$$

und Einsetzen in die Gleichung (3-1.23) erhält man

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \nabla \times (\vec{e}_1 \omega \Theta) &= \\
 &= -\vec{e}_1 \left[ \nabla^2(\omega \Theta) - \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \omega \Theta}{\partial \xi_1} \right) \right] + \\
 &\quad + \vec{e}_2 \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial \omega \Theta}{\partial \xi_2} + \\
 &\quad + \vec{e}_3 \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial \omega \Theta}{\partial \xi_3}
 \end{aligned} \tag{3-1.25}$$

Mit den Beziehungen (3-1.22) und (3-1.25) ergibt sich aus Gleichung (3-1.16) der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \nabla^2(\vec{e}_1 \omega \Theta) &= \frac{1}{h_1} \nabla \left[ \frac{\omega \Theta}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2 h_3}{\partial \xi_1} \right] + \\ &+ \vec{e}_1 \left\{ \nabla^2(\omega \Theta) - \frac{1}{h_1^2 h_2 h_3} \frac{\partial \omega \Theta}{\partial \xi_1} \frac{\partial h_2 h_3}{\partial \xi_1} \right\} \end{aligned} \quad (3-1.26)$$

Mit der Identität

$$\nabla^2(\omega \Theta) \equiv \omega \nabla^2 \Theta + 2(\nabla \omega) \cdot (\nabla \Theta) + \Theta \nabla^2 \omega \quad (3-1.27)$$

erhält man mit  $\omega = \omega(\xi_1)$  aus Gleichung (3-1.26)

$$\begin{aligned} \nabla^2(\vec{e}_1 \omega \Theta) &= \frac{1}{h_1} \nabla \left[ \frac{\omega \Theta}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2 h_3}{\partial \xi_1} \right] + \\ &+ \vec{e}_1 \left\{ \omega \nabla^2 \Theta + \frac{1}{h_1^2} \left[ 2 \frac{\partial \omega}{\partial \xi_1} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_1} + \Theta \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_1^2} - \frac{\omega}{h_2 h_3} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_1} \frac{\partial h_2 h_3}{\partial \xi_1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3-1.28)$$

Setzt man

$$\omega(\xi_1) = \xi_1 = r \quad (3-1.29)$$

und beachtet, daß für Kugelkoordinaten

$$h_2 h_3 = \xi_1^2 f(\xi_3) \quad (3-1.30)$$

gilt, dann heben sich die Terme in der eckigen Klammer gegenseitig weg und man erhält

$$\nabla^2(\vec{e}_1\omega\theta) = \frac{1}{h_1}\nabla\left[\frac{\omega\theta}{h_2h_3}\frac{\partial h_2h_3}{\partial\xi_1}\right] + \vec{e}_1\{\omega\nabla^2\theta\} \quad (3-1.31)$$

Durch Einsetzen der Beziehung (3-1.31) in die Gleichung (3-1.14) findet man schließlich

$$\nabla\times[c_s^2\vec{e}_1\omega\nabla^2\theta - \vec{e}_1\omega\ddot{\theta}] = 0 \quad (3-1.32)$$

Gleichung (3-1.32) ist stets erfüllt, wenn die Funktion  $\theta$  eine Lösung der skalaren Wellengleichung

$$c_s^2\nabla^2\theta - \ddot{\theta} = 0 \quad (3-1.33)$$

darstellt.

In gleicher Weise läßt sich unter Beachtung der Vektoridentität

$$\nabla^2\nabla\times[\vec{e}_1\omega X] \equiv \nabla\times[\nabla^2(\vec{e}_1\omega X)] \quad (3-1.34)$$

zeigen, daß die Gleichung (3-1.15) erfüllt ist, wenn die Funktion  $X$  eine Lösung der skalaren Wellengleichung

$$c_s^2\nabla^2X - \ddot{X} = 0 \quad (3-1.35)$$

ist.

Die durch die Scherwelle bewirkte Verschiebung  $\vec{u}^s$  läßt sich nach Gleichung (3-1.2) aus der Rotation des Vektors  $\vec{\Psi}$  bestimmen:

$$\begin{aligned}\vec{u}^s &\equiv \begin{Bmatrix} u_r^s \\ u_\varphi^s \\ u_\vartheta^s \end{Bmatrix} = \nabla \times \vec{\Psi} = \nabla \times \{ \vec{e}_r(r\Theta) + \nabla \times [\vec{e}_r(rX)] \} \\ &= \nabla \times \{ \vec{e}_r(r\Theta) + \vec{e}_\varphi \left[ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (rX) \right] \right] + \right. \\ &\quad \left. + \vec{e}_\vartheta \left[ \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ -\frac{\partial}{\partial \varphi} (rX) \right] \right] \right\} \quad (3-1.36)\end{aligned}$$

Da das betrachtete Problem rotationssymmetrisch zur z-Achse ist, gilt

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0 \quad (3-1.37)$$

Damit erhält man aus Gleichung (3-1.36) für die Komponenten des Vektors  $\vec{u}^s$  die Beziehungen

$$u_r^s = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ -\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \sin \vartheta \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (rX) \right] \right\} \right] \quad (3-1.38)$$

$$u_\varphi^s = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r\Theta) \right] \quad (3-1.39)$$

$$u_\vartheta^s = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sin \vartheta \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (rX) \right\} \right] \right\} \quad (3-1.40)$$

Wegen der Symmetrie muß die Verschiebungskomponente  $u_p^s$  gleich Null sein. Da nur diese Komponente des Vektors  $\vec{u}^s$  von der Funktion  $\Theta$  abhängig ist, genügt es,

$$\Theta(r, \varphi, \vartheta, t) = \text{const.} = 0 \quad (3-141)$$

zu setzen.

### 3.2 Lösung der Wellengleichung in Kugelkoordinaten

Die zu lösenden Gleichungen (3-1.12) und (3-1.35) sind formal von der Art

$$c^2 \nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad (3-2.1)$$

mit  $F = F(r, \varphi, \vartheta, t)$ .

Die Funktion  $F$  möge sich in der Form

$$F(r, \varphi, \vartheta, t) = f(r, \varphi, \vartheta) \cdot e^{-i\omega t} \quad (3-2.2)$$

mit

$i = \sqrt{-1}$  imaginäre Zahleneinheit

$\omega$  Kreisfrequenz

darstellen lassen. Gleichung (3-2.2) in die Beziehung (3-2.1) eingesetzt, führt zu

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0 \quad (3-2.3)$$

mit

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (3-2.4)$$

als Wellenzahl. Die unter dem Namen Helmholtz'sche Schwingungsgleichung bekannte Beziehung (3-2.3) lautet in Kugelkoordinaten geschrieben:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + k^2 f = 0 \end{aligned} \quad (3-2.5)$$

Gleichung (3-2.5) wird durch Trennung der Variablen gelöst.  
Mit dem Ansatz

$$f(r, \varphi, \vartheta) = f_1(r) \cdot f_2(\varphi) \cdot f_3(\vartheta) \quad (3-2.6)$$

ergeben sich für die Funktionen  $f_1$ ,  $f_2$  und  $f_3$  drei gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die durch zwei Separationsparameter  $p$  und  $q$  miteinander verknüpft sind:

$$\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df_1}{dr} + \left( k^2 - \frac{p^2}{r^2} \right) f_1 = 0 \quad (3-2.7)$$

$$\frac{d^2 f_2}{d\varphi^2} + q^2 f_2 = 0 \quad (3-2.8)$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{df_3}{d\vartheta} \right) + \left( p^2 - \frac{q^2}{\sin^2 \vartheta} \right) f_3 = 0 \quad (3-2.9)$$

Für  $k^2 \neq 0$  läßt sich Gleichung (3-2.7) mit der Substitution

$$f_1(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}} F_1(kr) \quad (3-2.10)$$

$$kr = x \quad (3-2.11)$$

in die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 F_1(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dF_1(x)}{dx} + \left(1 - \frac{p^2 + 0,25}{x^2}\right) F_1 = 0 \quad (3-2.12)$$

überführen. Mit

$$p^2 = n(n+1) \quad (3-2.13)$$

geht Gleichung (3-2.12) über in die Bessel'sche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 F_1}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dF_1}{dx} + \left(1 - \frac{(n+0,5)^2}{x^2}\right) F_1 = 0 \quad (3-2.14)$$

Nach [9] bilden die Zylinderfunktionen  $Z_{n+\frac{1}{2}}$  die Lösung der Differentialgleichung (3-2.14). Eine partikuläre Lösung der Gleichung (3.2.7) für den Eigenwert  $n$  ist dann durch

$$f_{1n}(kr) = \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) \quad (3-2.15)$$

gegeben.

Gleichung (3-2.8) ist eine ein-dimensionale Schwingungs-  
gleichung mit der Lösung

$$f_{2q}(\varphi) = e^{\pm iq\varphi} \quad (3-2.16)$$

für einen Eigenwert  $q$ . Da die Funktion  $f_{2q}(\varphi)$  periodisch  
in  $2\pi$  sein muß, kann  $q$  nur ganzzahlige Werte annehmen.

Mit

$$q = m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3-2.17)$$

geht Gleichung (3-2.16) über in

$$f_{2m}(\varphi) = e^{im\varphi} \quad (3-2.18)$$

Mit der Substitution

$$\mu = \cos \vartheta \quad (3-2.19)$$

erhält man aus Gleichung (3-2.9) unter Beachtung der  
Gleichungen (3-2.13), (3-2.17) und (3-2.19)

$$\begin{aligned} (1-\mu^2) \frac{d^2 f_3}{d\mu^2} - 2\mu \frac{df_3}{d\mu} + \\ + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right] f_3 = 0 \end{aligned} \quad (3-2.20)$$

Lösungen der Gleichung (3-2.20) sind nach /9/ die Kugelfunktionen. Bei dem betrachteten physikalischen Problem gilt  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ , deshalb sind als Lösungen der Gleichung (3-2.20) nur solche Kugelfunktionen zulässig, die für  $\vartheta=0$  und  $\vartheta=\pi$  nicht singulär werden. Nach /9/ sind dies die zugeordneten Legendre-Polynome  $P_n^m(\mu)$  mit ganzzahligen  $n \geq 0$ . Im vorliegenden Fall der Symmetrie zur z-Achse muß die Lösung der Gleichung (3-2.1) unabhängig von der Ortskoordinate  $\varphi$  sein. Dies ist nur für den Eigenwert  $m = 0$  erfüllt. Die Lösung der Gleichung (3-2.9) ist damit für einen Eigenwert  $n$  durch das Legendre-Polynom  $n$ -ten Grades gegeben:

$$f_{3n}(\cos \vartheta) = P_n(\cos \vartheta) \quad (3-2.21)$$

Da für  $n$  nur ganzzahlige Werte größer gleich Null zugelassen sind, kann für den Eigenwert  $n$  die partikuläre Lösung (3-2.15) der Gleichung (3-2.7) durch Einführen der sphärischen Zylinderfunktionen

$$z_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \cdot Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) \quad (3-2.22)$$

auch als

$$f_{1n}(kr) = z_n(kr) \quad (3-2.23)$$

geschrieben werden. Die vollständige Lösung der Gleichung (3-2.7) für den Eigenwert  $n$  ist dann durch die Linearkombination zweier fundamental unabhängiger Partikulärlösungen  $f_{1n} = z_n$  und  $f_{1n} = z_n^*$

$$f_{1n}(kr) = \alpha'_n z_n(kr) + \beta'_n z_n^*(kr) \quad (3-2.24)$$

gegeben. Durch Einsetzen der Lösungen (3-2.18) mit  $m = 0$ , (3-2.21) und (3-2.24) in die Gleichungen (3-2.6) und (3-2.2) ergibt sich dann für den Eigenwert  $n$  eine Lösung der Gleichung (3-2.1) zu

$$F_n(r, \vartheta, t) = [\alpha'_n z_n(kr) + \beta'_n z_n^*(kr)] P_n(\cos \vartheta) e^{-i\omega t} \quad (3-2.25)$$

Die vollständige Lösung der Gleichung (3-2.1) erhält man durch die Linearkombination aller möglichen Eigenwertfunktionen  $F_n$  schließlich zu

$$F(r, \vartheta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n z_n(kr) + \beta_n z_n^*(kr)] P_n(\cos \vartheta) e^{-i\omega t} \quad (3-2.26)$$

Nach /9/ bilden die Funktionenpaare

$$z_n = j_n(kr) \quad ; \quad z_n^* = y_n(kr) \quad (3-2.27)$$

beziehungsweise

$$z_n = h_n^{(1)}(kr) \quad ; \quad z_n^* = h_n^{(2)}(kr) \quad (3-2.28)$$

je ein Fundamentalsystem.

Dabei bedeuten:

$$j_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \quad (3-2.29)$$

$$y_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \cdot Y_{n+\frac{1}{2}}(kr) \quad (3-2.30)$$

$$h_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \cdot H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr) = \quad (3-2.31)$$

$$= \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}(n+1)}}{kr} \cdot e^{ikr} \cdot \sum_{l=0}^n (-1)^l \frac{(n+l)!}{l!(n-l)!} \cdot \frac{1}{(2ikr)^l}$$

$$h_n^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \cdot H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) = \quad (3-2.32)$$

$$= \frac{e^{+\frac{i\pi}{2}(n+1)}}{kr} \cdot e^{ikr} \sum_{l=0}^n \frac{(n+l)!}{l!(n-l)!} \cdot \frac{1}{(2ikr)^l}$$

$J_{n+1/2}$  bezeichnet die Besselfunktion der Ordnung  $n + \frac{1}{2}$ ,  
 $Y_{n+1/2}$  die Neumannfunktion der Ordnung  $n + \frac{1}{2}$  und  
 $H^{(i)}_{n+1/2}$  die Hankel'schen Funktionen i-ter Art ( $i=1,2$ )  
 der Ordnung  $n + \frac{1}{2}$ . Die Kleinbuchstaben bezeichnen die  
 entsprechenden sphärischen Zylinderfunktionen. Für die  
 Hankel'schen Funktionen sind auch die Darstellungen als  
 endliche Reihe angegeben. Zwischen den sphärischen Zylinder-  
 funktionen besteht noch die Beziehung

$$h^{(1)}_n(x) = \overline{h^{(2)}_n(x)} = j_n(x) + i y_n(x) \quad (3-2.33)$$

Der Querstrich bezeichnet die konjugiert komplexe Funktion.

### 3.3 Lösungsansätze zur Bestimmung der auftretenden Wellen

Nach Abschnitt 3.1 ist eine Kompressionswelle durch die Angabe einer skalaren Potentialfunktion eindeutig bestimmt. Betrachtet wird die Potentialfunktion

$$\Phi_e = \Phi_0 e^{i(k_1 z - \omega t)} \quad (3-3.1)$$

mit

$$\Phi_0 = \frac{\sigma_m}{\omega^2 \xi_1} \quad (3-3.2)$$

Hierin sind

$$k_1 = \frac{\omega}{c_{k1}} \quad \begin{array}{l} \text{Wellenzahl für Kompressions-} \\ \text{wellen im Medium 1,} \end{array} \quad (3-3.3)$$

$$\sigma_m \quad \text{Amplitude der Spannung } \sigma_{zz}$$

Gleichung (3-3.1) beschreibt eine komplexe Kompressionswelle der Kreisfrequenz  $\omega$ , die sich in positiver z-Richtung mit der Geschwindigkeit  $c_{k1}$  ausbreitet. Die physikalisch vorhandene Welle erhält man aus der komplexen Welle, indem entweder nur der Real- oder der Imaginärteil der komplexen Welle betrachtet wird. Der Zeiger  $\Phi_0$  ist so gewählt, daß die Spannung

$$\sigma_{zz}(z, t) = (\lambda + 2\mu) \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\} \quad (3-3.4)$$

am Ort  $z = 0$  zur Zeit  $t = 0$  einen Nulldurchgang hat und anschließend eine Zugspannung auftritt. Dabei gilt die Definition

$$\overline{\sigma_{zz}} = \left\{ \begin{array}{ll} < 0 & \text{Druckspannung} \\ > 0 & \text{Zugspannung} \end{array} \right\} \quad (3-3.5)$$

In Abschnitt 2 wurde bereits angegeben, daß an der Grenzfläche zwischen den Medien je eine Kompressions- und eine Scherwelle erzeugt werden. Für die reflektierte Kompressionswelle wird als Ansatz

$$\phi_r(r, \vartheta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(k_1 r) \cdot P_n(\cos \vartheta) \cdot e^{-i\omega t} \quad (3-3.6)$$

und für die reflektierte Scherwelle

$$\chi_r(r, \vartheta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n h_n^{(1)}(L_1 r) \cdot P_n(\cos \vartheta) \cdot e^{-i\omega t} \quad (3-3.7)$$

mit  $k_1$  aus Gleichung (3-3.3) als Wellenzahl der Kompressionswelle und

$$L_1 = \frac{\omega}{c_{s1}} \quad (3-3.8)$$

als Wellenzahl der Scherwelle im Medium 1 gewählt. In beiden Ansätzen (3-3.6) und (3-3.7) wurde als geeignete Linearkombination der sphärischen Zylinderfunktion die Hankel'sche Funktion erster Art eingesetzt. Wie aus den in den Gleichungen (3-2.31) und (3-2.32) angegebenen Reihendarstellungen für die sphärischen Hankelfunktionen zu ersehen ist, beschreibt allein der in der Hankel'schen Funktion erster Art auftretende Term  $e^{ikr}$  in Verbindung

mit dem Zeitfaktor  $e^{-i\omega t}$  eine sich in positiver  $r$ -Richtung ausbreitende Welle.

Für die durch Brechung in der Kugel auftretende Kompressionswelle wird der Ansatz

$$\Phi_b(r, \vartheta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n j_n(k_2 r) \cdot P_n(\cos \vartheta) \cdot e^{-i\omega t} \quad (3-3.9)$$

und für die Scherwelle in der Kugel der Ansatz

$$\chi_b(r, \vartheta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n j_n(l_2 r) \cdot P_n(\cos \vartheta) \cdot e^{-i\omega t} \quad (3-3.10)$$

mit

$$k_2 = \frac{\omega}{c_{k2}} \quad (3-3.11)$$

als Wellenzahl der Kompressionswelle und

$$l_2 = \frac{\omega}{c_{s2}} \quad (3-3.12)$$

als Wellenzahl der Scherwelle im Medium 2 gemacht.

In beiden Ansätzen zur Beschreibung der Wellenfelder innerhalb der Kugel tritt als geeignete Linearkombination der sphärischen Zylinderfunktionen nur die sphärische Besselfunktion auf, da für  $r = 0$  die Potentialfunktionen  $\Phi_b$  und  $\chi_b$  nicht singular werden dürfen.

In den Gleichungen (3-3.6), (3-3.7), (3-3.9) und (3-3.10) sind  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  und  $D_n$  komplexe Konstanten, die in Abschnitt 3.6 aus den Grenzbedingungen an der Kugeloberfläche bestimmt werden.

3.4 Bestimmung des Verschiebungsvektors  $\vec{u}$  und des Spannungstensors  $\tau_{ij}$  als Funktion der Potentialfunktionen  $\phi$  und  $\chi$  in Kugelkoordinaten

Die Komponenten  $u_r$ ,  $u_\phi$  und  $u_\vartheta$  des Verschiebungsvektors  $\vec{u}$  lassen sich aus Gleichung (3-1.2) mit Hilfe der in Abschnitt 3.1 hergeleiteten Beziehungen unter Beachtung von Gleichung (3-1.37) zu

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2(r\chi)}{\partial r^2} - r \nabla^2 \chi \quad (3-4.1)$$

$$u_\phi = 0 \quad (3-4.2)$$

$$u_\vartheta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2(r\chi)}{\partial \vartheta \partial r} \right) \quad (3-4.3)$$

bestimmen.

In einem homogenen isotropen elastischen Körper sind Spannungen und Dehnungen durch das allgemeine Hook'sche Gesetz miteinander verknüpft:

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3-4.4)$$

mit

$\tau_{ij}$  Spannungstensor,  
 $\epsilon_{kk} = \text{div } \vec{u}$ ,  
 $\delta_{ij}$  Kronecker Symbol,  
 $\epsilon_{ij}$  Deformationstensor.

Nach /10/ gilt für den Deformationstensor in Kugelkoordinaten

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{rr} & \epsilon_{r\varphi} & \epsilon_{r\vartheta} \\ \epsilon_{\varphi r} & \epsilon_{\varphi\varphi} & \epsilon_{\varphi\vartheta} \\ \epsilon_{\vartheta r} & \epsilon_{\vartheta\varphi} & \epsilon_{\vartheta\vartheta} \end{pmatrix} \quad (3-4.5)$$

mit

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (3-4.6)$$

$$\epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\vartheta}{r} \cot \vartheta \quad (3-4.7)$$

$$\epsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r} \quad (3-4.8)$$

$$\epsilon_{r\varphi} = \epsilon_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \quad (3-4.9)$$

$$\epsilon_{r\vartheta} = \epsilon_{\vartheta r} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - \frac{u_\vartheta}{r} \right) \quad (3-4.10)$$

$$\epsilon_{\varphi\vartheta} = \epsilon_{\vartheta\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \cot \vartheta \right) \quad (3-4.11)$$

Aus Gleichung (3-4.4) erhält man mit Hilfe der Beziehungen (3-4.6) bis (3-4.11) unter Beachtung der Gleichung (3-1.37) die Spannungskomponenten in Abhängigkeit von den Skalarfunktionen  $\Phi$  und  $X$  zu

$$\sigma_{rr} = \lambda \Delta \Phi + 2\mu \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial^2 (rX)}{\partial r^2} - r \Delta X \right] \right\} \quad (3-4.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta\vartheta} = \lambda \Delta \Phi + 2\mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cot \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 (rX)}{\partial r^2} - r \Delta X \right) + \frac{\cot \vartheta}{r^2} \frac{\partial^2 (rX)}{\partial \vartheta \partial r} \right\} \end{aligned} \quad (3-4.13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta\vartheta} = \lambda \Delta \Phi + 2\mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 (rX)}{\partial \vartheta^2 \partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 (rX)}{\partial r^2} - r \Delta X \right) \right\} \end{aligned} \quad (3-4.14)$$

$$\sigma_{r\vartheta} = \sigma_{\vartheta r} = 0 \quad (3-4.15)$$

$$\sigma_{r\vartheta} = \sigma_{\vartheta r} = \mu \left\{ \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \vartheta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \right. \quad (3-4.16)$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{\partial^2 (rX)}{\partial r^2} - r \Delta X \right) -$$

$$\left. - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (rX)}{\partial \vartheta \partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rX)}{\partial \vartheta \partial r} \right) \right\}$$

$$\sigma_{\varphi\vartheta} = \sigma_{\vartheta\varphi} = 0 \quad (3-4.17)$$

### 3.5 Bestimmung der Verschiebungen und Spannungen innerhalb und außerhalb der Kugel

Nachdem in Abschnitt 3.4 das Verschiebungs- und Spannungsfeld allgemein als Funktion der Skalare  $\phi$  und  $\chi$  dargestellt wurden, lassen sich nun das Verschiebungs- und Spannungsfeld innerhalb und außerhalb der Kugel bestimmen, indem man die durch jede Welle bewirkten Verschiebungen und Spannungen überlagert.

Im Inneren der Kugel, also für  $r < R_0$ , treten eine Kompressionswelle  $\phi_2$  und eine Scherwelle  $\chi_b$  auf. Durch Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke (3-3.9) und (3-3.10) für diese Potentialfunktionen in die Gleichungen (3-4.1) bis (3-4.3) bzw. (3-4.12) bis (3-4.17) erhält man die folgenden Beziehungen für die Verschiebungen und Spannungen innerhalb der Kugel (der hochgestellte Index (2) kennzeichnet das Kugelmedium):

$$u_r^{(2)} = \frac{1}{r} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (C_n e_{33} + D_n e_{34}) P_n \right\} e^{-i\omega t} \quad (3-5.1)$$

$$u_{\varphi}^{(2)} = 0 \quad (3-5.2)$$

$$u_{\vartheta}^{(2)} = \frac{1}{r} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (C_n e_{43} + D_n e_{44}) \frac{dP_n}{d\vartheta} \right\} e^{-i\omega t} \quad (3-5.3)$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} = \frac{2\mu_2}{r^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (C_n e_{13} + D_n e_{14}) P_n \right\} e^{-i\omega t} \quad (3-5.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{2\mu_2}{r^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [(C_n e_{53a} + D_n e_{54a}) P_n + \right. \\ \left. + (C_n e_{53b} + D_n e_{54b}) \cot \vartheta \cdot \frac{dP_n}{d\vartheta}] \right\} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (3-5.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2)} = \frac{2\mu_2}{r^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [(C_n e_{63a} + D_n e_{64a}) P_n + \right. \\ \left. + (C_n e_{63b} + D_n e_{64b}) \cot \vartheta \cdot \frac{dP_n}{d\vartheta}] \right\} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (3-5.6)$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(2)} = 0 \quad (3-5.7)$$

$$\sigma_{r\vartheta}^{(2)} = \frac{2\mu_2}{r^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (C_n e_{23} + D_n e_{24}) \frac{dP_n}{d\vartheta} \right\} e^{-i\omega t} \quad (3-5.8)$$

$$\sigma_{\varphi\vartheta}^{(2)} = 0 \quad (3-5.9)$$

Hierin bedeuten

$$e_{33} = n j_n(k_2 r) - k_2 r j_{n+1}(k_2 r) \quad (3-5.10)$$

$$e_{34} = n(n+1) j_n(L_2 r) \quad (3-5.11)$$

$$e_{43} = j_n(k_2 r) \quad (3-5.12)$$

$$e_{44} = (n+1) j_n(L_2 r) - L_2 r j_{n+1}(L_2 r) \quad (3-5.13)$$

$$e_{13} = (n^2 - n - \frac{(L_2 r)^2}{2}) j_n(k_2 r) + 2 k_2 r j_{n+1}(k_2 r) \quad (3-5.14)$$

$$e_{14} = n(n+1) [(n-1) j_n(L_2 r) - L_2 r j_{n+1}(L_2 r)] \quad (3-5.15)$$

$$e_{53a} = [n + (k_2 r)^2 - \frac{(L_2 r)^2}{2}] j_n(k_2 r) - k_2 r j_{n+1}(k_2 r) \quad (3-5.16)$$

$$e_{54a} = n(n+1) j_n(L_2 r) \quad (3-5.17)$$

$$e_{53b} = j_n(k_2 r) \quad (3-5.18)$$

$$e_{54b} = (n+1) j_n(L_2 r) - L_2 r j_{n+1}(L_2 r) \quad (3-5.19)$$

$$e_{63a} = [-n^2 + (k_2 r)^2 - \frac{(L_2 r)^2}{2}] j_n(k_2 r) - k_2 r j_{n+1}(k_2 r) \quad (3-5.20)$$

$$e_{64a} = -(n^2+n)[n j_n(L_2 r) - L_2 r j_{n+1}(L_2 r)] \quad (3-5.21)$$

$$e_{63b} = -j_n(k_2 r) \quad (3-5.22)$$

$$e_{64b} = -[(n+1) j_n(L_2 r) - L_2 r j_{n+1}(L_2 r)] \quad (3-5.23)$$

$$e_{23} = (n-1) j_n(k_2 r) - k_2 r j_{n+1}(k_2 r) \quad (3-5.24)$$

$$e_{24} = (n^2-1 - \frac{(L_2 r)^2}{2}) j_n(L_2 r) + L_2 r j_{n+1}(L_2 r) \quad (3-5.25)$$

Bevor die entsprechenden Beziehungen für den Bereich außerhalb der Kugel hergeleitet werden, wird die Gleichung (3-3.1) der einfallenden Kompressionswelle in eine für die weitere Rechnung vorteilhaftere Form gebracht. Mit

$$z = r \cos \vartheta \quad (3-5.26)$$

geht Gleichung (3-3.1) über in

$$\Phi_e(r, \vartheta, t) = \Phi_0 e^{ik_1 r \cos \vartheta} \cdot e^{-i\omega t} \quad (3-5.27)$$

Nach /11/ gilt die Beziehung

$$e^{ik_1 r \cos \vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(k_1 r) P_n(\cos \vartheta) \quad (3-5.28)$$

mit deren Hilfe die Gleichung (3-5.27) in

$$\Phi_e(r, \vartheta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n j_n(k_1 r) P_n(\cos \vartheta) \cdot e^{-i\omega t} \quad (3-5.29)$$

mit

$$\Phi_n = \Phi_0 (2n+1) i^n \quad (3-5.30)$$

übergeht. Gleichung (3-5.29) beschreibt die einfallende Kompressionswelle in einer Form, die der Lösung der Wellengleichung in Kugelkoordinaten (siehe Gleichung (3-2.26) entspricht.

Für das Verschiebungs- und Spannungsfeld im umgebenden Medium lassen sich entsprechende Beziehungen herleiten, indem die Gleichungen (3-5.29) für die einfallende Kompressionswelle  $\Phi_e$ , (3-3.6) für die reflektierte Kompressionswelle  $\Phi_r$  und (3-3.7) für die reflektierte Scherwelle  $\chi_r$  wiederum in die Beziehungen (3-4.1) bis (3-4.3) bzw. (3-4.12) bis (3-4.17) eingesetzt werden.

Im einzelnen erhält man dann für den Bereich außerhalb der Kugel, also für  $r > R_0$ , die folgenden Beziehungen für die Komponenten des Verschiebungsvektors  $\vec{u}$  bzw. des Spannungstensors  $\tau_{ij}$  in Kugelkoordinaten (der hochgestellte Index (1) kennzeichnet das umgebende Medium):

$$u_r^{(1)} = \frac{1}{r} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n e_{3r} + A_n e_{31} + B_n e_{32}) \cdot P_n \right\} e^{-i\omega t} \quad (3-5.31)$$

$$u_{\varphi}^{(1)} = 0 \quad (3-5.32)$$

$$u_{\vartheta}^{(1)} = \frac{1}{r} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n e_{4r} + A_n e_{41} + B_n e_{42}) \frac{dP_n}{d\vartheta} \right\} e^{-i\omega t} \quad (3-5.33)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \frac{2\mu_1}{r^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n e_{1r} + A_n e_{11} + B_n e_{12}) P_n \right\} e^{-i\omega t} \quad (3-5.34)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \frac{2\mu_1}{r^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [(\phi_n e_{5ra} + A_n e_{51a} + B_n e_{52a}) P_n + \right. \quad (3-5.35)$$

$$\left. + (\phi_n e_{5rb} + A_n e_{51b} + B_n e_{52b}) \cot \vartheta \frac{dP_n}{d\vartheta} \right\} e^{-i\omega t}$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}^{(1)} = \frac{2\mu_1}{r^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [(\phi_n e_{6ra} + A_n e_{61a} + B_n e_{62a}) P_n + \right. \quad (3-5.36)$$

$$\left. + (\phi_n e_{6rb} + A_n e_{61b} + B_n e_{62b}) \cot \vartheta \frac{dP_n}{d\vartheta} \right\} e^{-i\omega t}$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(1)} = 0 \quad (3-5.37)$$

$$\sigma_{r\vartheta}^{(1)} = \frac{2\mu}{r^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [(\phi_n e_{2r} + A_n e_{21} + B_n e_{22}) \frac{dP_n}{d\vartheta}] \right\} e^{-i\omega t} \quad (3-5.38)$$

$$\sigma_{\varphi\vartheta}^{(1)} = 0 \quad (3-5.39)$$

Hierin bedeuten

$$e_{3r} = n j_{n-1}(k_1 r) - k_1 r j_{n+1}(k_1 r) \quad (3-5.40)$$

$$e_{31} = n h_{n-1}^{(1)}(k_1 r) - k_1 r h_{n+1}^{(1)}(k_1 r) \quad (3-5.41)$$

$$e_{32} = n(n+1) h_n^{(1)}(L_1 r) \quad (3-5.42)$$

$$e_{4r} = j_n(k_1 r) \quad (3-5.43)$$

$$e_{41} = h_n^{(1)}(k_1 r) \quad (3-5.44)$$

$$e_{42} = (n+1) h_n^{(1)}(L_1 r) \quad (3-5.45)$$

$$e_{1r} = (n^2 - n - \frac{(l_1 r)^2}{2}) j_n(k_1 r) + 2k_1 r j_{n+1}(k_1 r) \quad (3-5.46)$$

$$e_{11} = (n^2 - n - \frac{(l_1 r)^2}{2}) h_n^{(1)}(k_1 r) + 2k_1 r h_{n+1}^{(1)}(k_1 r) \quad (3-5.47)$$

$$e_{12} = n(n+1)[(n-1)h_n^{(1)}(L_1 r) - L_1 r h_{n+1}^{(1)}(L_1 r)] \quad (3-5.48)$$

$$e_{5ra} = [n + (k_1 r)^2 - \frac{(l_1 r)^2}{2}] j_n(k_1 r) - k_1 r j_{n+1}(k_1 r) \quad (3-5.49)$$

$$e_{51a} = [n + (k_1 r)^2 - \frac{(l_1 r)^2}{2}] h_n^{(1)}(k_1 r) - k_1 r h_{n+1}^{(1)}(k_1 r) \quad (3-5.50)$$

$$e_{52a} = n(n+1)h_n^{(1)}(L_1 r) \quad (3-5.51)$$

$$e_{5rb} = j_n(k_1 r) \quad (3-5.52)$$

$$e_{51b} = h_n^{(1)}(k_1 r) \quad (3-5.53)$$

$$e_{52b} = (n+1)h_n^{(1)}(L_1 r) - L_1 r h_{n+1}^{(1)}(L_1 r) \quad (3-5.54)$$

$$e_{6ra} = [-n^2 + (k_1 r)^2 - \frac{(l_1 r)^2}{2}] j_n(k_1 r) - k_1 r j_{n+1}(k_1 r) \quad (3-5.55)$$

$$e_{61a} = [-n^2 + (k_1 r)^2 - \frac{(l_1 r)^2}{2}] h_n^{(1)}(k_1 r) - k_1 r h_{n+1}^{(1)}(k_1 r) \quad (3-5.56)$$

$$e_{62a} = -(n^2+n)[nh_n^{(1)}(L_1r) - L_1rh_{n+1}^{(1)}(L_1r)] \quad (3-5.57)$$

$$e_{6rb} = -j_n(k_1r) \quad (3-5.58)$$

$$e_{61b} = -h_n^{(1)}(k_1r) \quad (3-5.59)$$

$$e_{62b} = -[(n+1)h_n^{(1)}(L_1r) - L_1rh_{n+1}^{(1)}(L_1r)] \quad (3-5.60)$$

$$e_{2r} = (n-1)j_n(k_1r) - k_1rj_{n+1}(k_1r) \quad (3-5.61)$$

$$e_{21} = (n-1)h_n^{(1)}(k_1r) - k_1rh_{n+1}^{(1)}(k_1r) \quad (3-5.62)$$

$$e_{22} = [n^2-1-\frac{(L_1r)^2}{2}]h_n^{(1)}(L_1r) + L_1rh_{n+1}^{(1)}(L_1r) \quad (3-5.63)$$

### 3.6 Bestimmung der Konstanten $A_n$ , $B_n$ , $C_n$ und $D_n$

Zur Bestimmung der vier unbekannten komplexen Konstanten  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  und  $D_n$  werden vier Gleichungen benötigt, die aus den Grenzbedingungen für die in der Ebene  $r = R_0$  auftretenden Spannungen und Verschiebungen hergeleitet werden. Auf der Kugeloberfläche  $r = R_0$  muß gelten, daß die durch die einfallende Welle  $\Phi_e$  und durch die reflektierten Wellen  $\Phi_r$  und  $\chi_r$  hervorgerufenen Spannungen  $\sigma_{rr}^{(1)}$  und  $\sigma_{r\vartheta}^{(1)}$  sowie Verschiebungen  $u_r^{(1)}$  und  $u_\vartheta^{(1)}$  gleich den Spannungen  $\sigma_{rr}^{(2)}$  und  $\sigma_{r\vartheta}^{(2)}$  bzw. den Verschiebungen  $u_r^{(2)}$  und  $u_\vartheta^{(2)}$  sind, welche die gebrochenen Wellen bewirken. Diese vier Grenzbedingungen lassen sich mathematisch als

$$\sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=R_0} = \sigma_{rr}^{(2)} \Big|_{r=R_0} \quad (3-6.1)$$

$$\sigma_{r\vartheta}^{(1)} \Big|_{r=R_0} = \sigma_{r\vartheta}^{(2)} \Big|_{r=R_0} \quad (3-6.2)$$

$$u_r^{(1)} \Big|_{r=R_0} = u_r^{(2)} \Big|_{r=R_0} \quad (3-6.3)$$

$$u_\vartheta^{(1)} \Big|_{r=R_0} = u_\vartheta^{(2)} \Big|_{r=R_0} \quad (3-6.4)$$

formulieren.

Unter Benutzung der in Abschnitt 3.5 hergeleiteten Ausdrücke für die Spannungen und Verschiebungen erhält man für die Grenzbedingungen (3-6.1) bis (3-6.4) die folgenden Beziehungen:

$$\mu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n E_{1r} + A_n E_{11} + B_n E_{12}) P_n = \quad (3-6.5)$$

$$= \mu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (C_n E_{13} + D_n E_{14}) P_n$$

$$\mu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n E_{2r} + A_n E_{21} + B_n E_{22}) \frac{dP_n}{d\mathfrak{V}} = \quad (3-6.6)$$

$$= \mu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (C_n E_{23} + D_n E_{24}) \frac{dP_n}{d\mathfrak{V}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n E_{3r} + A_n E_{31} + B_n E_{32}) P_n = \quad (3-6.7)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (C_n E_{33} + D_n E_{34}) P_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n E_{4r} + A_n E_{41} + B_n E_{42}) \frac{dP_n}{d\mathfrak{V}} = \quad (3-6.8)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (C_n E_{43} + D_n E_{44}) \frac{dP_n}{d\mathfrak{V}}$$

Darin bedeuten die Größen  $E_{ij}$  bzw.  $E_{ir}$  ( $i=1,4$ ;  $j=1,4$ ) den Wert der in Abschnitt 3.5 eingeführten Größen  $e_{ij}$  bzw.  $e_{ir}$  an der Stelle  $r = R_0$ .

Mit  $P_n = P_n^0$  und  $\frac{dP_n}{d\vartheta} = -P_n^1$  erhält man aus den Gleichungen (3-6.5) bis (3-6.8) nach Multiplikation mit  $P_s^t \cdot \sin \vartheta$  und anschließender Integration von  $\vartheta = 0$  bis  $\vartheta = \pi$  unter Beachtung der Orthogonalitätseigenschaften der Legendre-Polynome

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(x) \cdot P_s^t(x) dx = \begin{cases} 0 & ; n \neq s \text{ oder } m \neq t \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} & ; n=s \text{ und } m=t \end{cases} \quad (3-6.9)$$

die folgenden Beziehungen:

$$\mu_1 (\phi_n E_{1r} + A_n E_{11} + B_n E_{12}) = \mu_2 (C_n E_{13} + D_n E_{14}) \quad (3-6.10)$$

$$\mu_1 (\phi_n E_{2r} + A_n E_{21} + B_n E_{22}) = \mu_2 (C_n E_{23} + D_n E_{24}) \quad (3-6.11)$$

$$\phi_n E_{3r} + A_n E_{31} + B_n E_{32} = C_n E_{33} + D_n E_{34} \quad (3-6.12)$$

$$\Phi E_{nr} + A_n E_{41} + B_n E_{42} = C_n E_{43} + D_n E_{44} \quad (3-6.13)$$

Nach geeignetem Umstellen erhält man aus den Gleichungen (3-6.10) bis (3-6.13) ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Unbekannten  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  und  $D_n$ . Als Matrixengleichung kann das Gleichungssystem in der Form

$$\begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & -\tilde{\mu} E_{13} & -\tilde{\mu} E_{14} \\ E_{21} & E_{22} & -\tilde{\mu} E_{23} & -\tilde{\mu} E_{24} \\ E_{31} & E_{32} & -E_{33} & -E_{34} \\ E_{41} & E_{42} & -E_{43} & -E_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{vmatrix} = -\Phi_n \begin{vmatrix} E_{1r} \\ E_{2r} \\ E_{3r} \\ E_{4r} \end{vmatrix} \quad (3-6.14)$$

mit

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (3-6.15)$$

geschrieben werden. Damit sind nach der Bestimmung der unbekannten Wellenkoeffizienten alle notwendigen Größen zur Berechnung des Spannungsfeldes innerhalb und außerhalb der Kugel eindeutig bestimmt.

#### 4. Numerische Auswertung

##### 4.1 Das FØRTRAN-IV Programm SPELAK

Zur numerischen Auswertung der in Abschnitt 3.5 angegebenen Beziehungen für die Spannungen innerhalb und außerhalb der elastischen Kugel wurde das Rechenprogramm SPELAK in der Programmiersprache FØRTRAN-IV geschrieben.

SPELAK bestimmt aus sechs Eingabeparametern  $R_a$ ,  $R_e$ , NR,  $\vartheta_a$ ,  $\vartheta_e$  und NT durch lineare Interpolation die Koordinatenpunkte, an denen alle auftretenden Spannungen berechnet werden. Im einzelnen haben die Eingabeparameter die folgende Bedeutung:

|               |                                             |
|---------------|---------------------------------------------|
| $R_a$         | Anfangsradius,                              |
| $R_e$         | Endradius,                                  |
| NR            | Anzahl der radialen Stützpunkte $\leq 21$ , |
| $\vartheta_a$ | Anfangswinkel,                              |
| $\vartheta_e$ | Endwinkel,                                  |
| NT            | Anzahl der Winkelstützpunkte $\leq 19$ .    |

Als Eingabedaten für das Programm SPELAK werden außer den Angaben zur Geometrie noch die Materialdaten beider Medien sowie ein vorzugebendes Verhältnis des Kugeldurchmessers  $D = 2R_0$  zur Wellenlänge  $\lambda_2$  innerhalb der Kugel benötigt. Durch die Angabe des Parameters  $D/\lambda_2$  ist dann wegen

$$\omega = \frac{\pi c_{K2}}{R_0} \frac{D}{\lambda_2} \quad (4-1.1)$$

auch die Kreisfrequenz  $\omega$  der einfallenden Kompressionswelle bestimmt. An Materialdaten werden die Schallgeschwindigkeiten  $c_k$  und  $c_s$  für Kompressions- und Scherwellen sowie die Dichten  $\rho$  beider Medien eingegeben.

Die Ausgabe des Rechenprogramms gliedert sich in drei Teile auf. Zuerst werden sämtliche Eingabedaten sowie die aus ihnen errechneten Konstanten ausgegeben, dann die ermittelten Wellenkoeffizienten  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  und  $D_n$ , schließlich die berechneten komplexen Spannungen  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  und  $\sigma_{r\vartheta}$  sowie deren Beträge jeweils für  $r = \text{const.}$  in Abhängigkeit der Winkelkoordinate  $\vartheta$ .

Zu Kontrollzwecken wird ferner ausgedruckt, nach welcher Anzahl  $n_{\text{max}}$  von Summanden die unendlichen Reihen abgebrochen wurden.

In Abbildung 4 ist der schematische Rechenablauf in Form eines Flußdiagramms dargestellt.

In den in Abschnitt 3.5 angegebenen Beziehungen für die Spannungen innerhalb und außerhalb der Kugel treten unendliche, aber konvergente Reihen auf. Bei der numerischen Auswertung der Beziehungen für die Spannungen werden die Reihenentwicklungen dann abgebrochen, wenn von einem bestimmten  $n = n_{\text{max}}$  ab der relative Zuwachs aller vier zu berechnender Spannungen  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  und  $\sigma_{r\vartheta}$  kleiner als eine vorzugebende Größe  $\varepsilon$  wird:

$$\left| \frac{\sigma_i^{(n_{\text{max}})} - \sigma_i^{(n_{\text{max}}+1)}}{\sigma_i^{(n_{\text{max}})}} \right| < \varepsilon ; i = \begin{Bmatrix} r & r \\ \varphi & \varphi \\ \vartheta & \vartheta \\ r & \vartheta \end{Bmatrix} \quad (4-1.2)$$

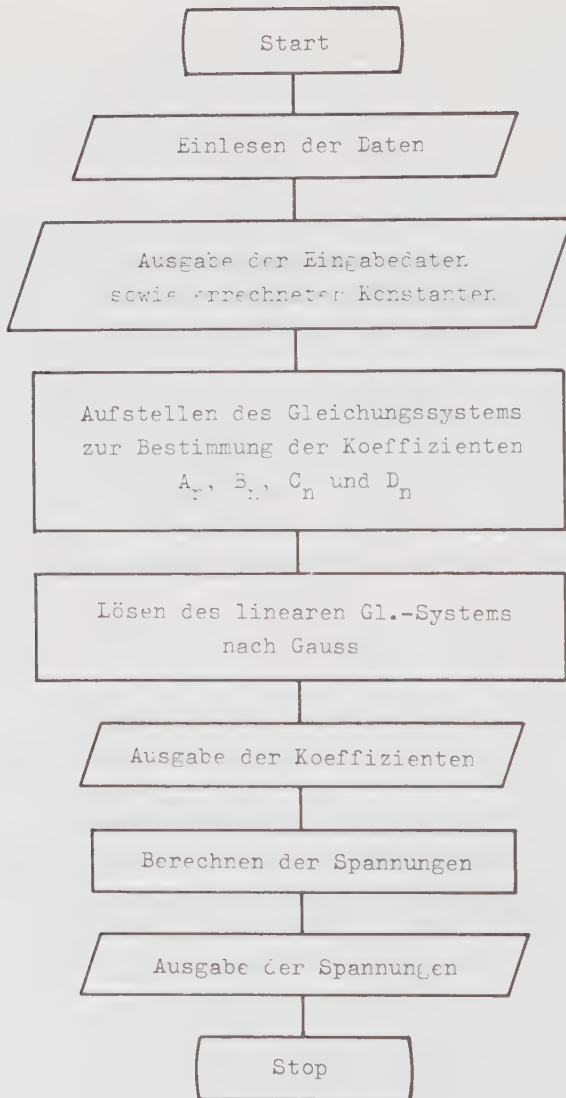


Abb. 4: Schematischer Rechenablauf in SPELAK

Zur Bestimmung eines geeigneten Faktors  $\varepsilon$  wurden verschiedene Testrechnungen mit variablem  $n_{\max}$  durchgeführt und die erzielten Ergebnisse hinsichtlich ihrer Genauigkeit miteinander verglichen. Aus diesen Rechnungen wurde  $\varepsilon = 10^{-4}$  als ein geeigneter Zahlenwert ermittelt.

Alle Rechnungen wurden auf dem Telefunken Rechner TR 440 des Rechenzentrums der Ruhr-Universität Bochum durchgeführt. Die von SPELAK benötigten Rechnerkernzeiten hängen in starkem Maße von dem Parameter  $D/\lambda_2$  ab. Für ein Problem mit  $NR = 21$  und  $NT = 19$  Stützpunkten werden in etwa die in Tabelle 1 angegebenen CPU-Zeiten benötigt.

| $D/\lambda_2$ | CPU-Zeit |
|---------------|----------|
| 0.1           | 30 s     |
| 1.0           | 40 s     |
| 10.0          | 130 s    |
| 50.0          | 400 s    |

Tabelle 1: Von SPELAK benötigte CPU-Zeit

In der vorliegenden Version hat das Programm einen Kernspeicherbedarf von 36k Worten.

#### 4.2 Berechnung der Legendre-Polynome $P_n(\cos \vartheta)$ ,

der Ableitung  $\frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta}$  sowie des Produktes  $\cot \vartheta \cdot \frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta}$

Die oben angeführten Ausdrücke werden bei der Berechnung der Spannungen benötigt. Nach /9/ gilt für die Legendre-Polynome die Rekursionsformel

$$P_n(x) = \frac{1}{n} \{ (2n-1)x \cdot P_{n-1}(x) - (n-1) \cdot P_{n-2}(x) \} \quad (4-2.1)$$

Mit den Anfangswerten

$$P_0(x) = 1 \quad (4-2.2)$$

$$P_1(x) = x \quad (4-2.3)$$

sind dann durch Vorwärtsrekursion die Legendre-Polynome  $P_n(x)$  für  $n \geq 2$  zu bestimmen.

Für die Ableitung  $\frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta}$  findet man ebenfalls in /9/ die Rekursionsformel

$$\frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = \frac{dP_{n-1}(\cos \vartheta)}{d\vartheta} - (2n-1)P_{n-1}(\cos \vartheta)\sin \vartheta \quad (4-2.4)$$

Mit den Anfangswerten

$$\frac{dP_0(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = 0 \quad (4-2.5)$$

$$\frac{dP_1(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \quad (4-2.6)$$

und  $P_n(\cos \vartheta)$  aus Gleichung (4-2.1) lassen sich dann ebenfalls durch Vorwärtsrekursion die Ableitungen der Legendre-Polynome für  $n \geq 2$  berechnen.

Durch Multiplikation der Gleichung (4-2.4) mit  $\cot \vartheta$  erhält man als Rekursionsformel zur direkten Berechnung von  $\cot \vartheta \cdot \frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta}$  den Ausdruck

$$\cot \vartheta \frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = \quad (4-2.7)$$

$$= \cot \vartheta \frac{dP_{n-2}(\cos \vartheta)}{d\vartheta} - (2n-1) \cdot P_{n-1}(\cos \vartheta) \cos \vartheta$$

Mit den Anfangswerten

$$\cot \vartheta \frac{dP_0(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = 0 \quad (4-2.8)$$

$$\cot \vartheta \frac{dP_1(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = -\cos \vartheta \quad (4-2.9)$$

und  $P_n(\cos \vartheta)$  aus Gleichung (4-2.1) werden dann für  $n \geq 2$  die übrigen Werte durch Aufwärtsrekursion ermittelt.

#### 4.3 Berechnung der sphärischen Besselfunktion $j_n(x)$ und der sphärischen Neumannfunktion $y_n(x)$

In den Beziehungen für die Spannungen erscheinen die sphärische Besselfunktion  $j_n(x)$  sowie die sphärische Hankelfunktion erster Art  $h_n^{(1)}(x)$ , die sich nach Gleichung (3-2.33) auf die sphärische Besselfunktion und sphärische Neumannfunktion zurückführen läßt. Diese beiden Funktionen sind mit der einfachen Bessel- bzw. Neumannfunktion durch die Gleichungen (3-2.29) und (3-2.30) verknüpft. Dadurch wird das Problem der Berechnung der beiden sphärischen Zylinderfunktionen der Ordnung  $n$  auf die Berechnung der Bessel- bzw. Neumannfunktion der Ordnung  $n + \frac{1}{2}$  mit ganzzahligem  $n$  zurückgeführt.

Sowohl für die Besselfunktion  $J_\nu(x)$  als auch für die Neumannfunktion  $Y_\nu(x)$  der Ordnung  $\nu$  gilt nach /9/ die Rekursionsformel

$$G_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} G_\nu(x) - G_{\nu-1}(x) \quad (4-3.1)$$

Die direkte Anwendung der Gleichung (4-3.1) führt bei der Besselfunktion mit zunehmendem  $\nu$  wegen der in digitalen Datenverarbeitungsanlagen stets auftretenden Rundungsfehler sehr bald zu numerischen Instabilitäten, die sich nur dann vermeiden lassen, wenn die Rekursion in Richtung abnehmender  $\nu$  erfolgt. Eine Darstellung des hier angewandten Rekursionsverfahrens sowie der Methode zur Bestimmung der notwendigen Anfangswerte sind /12/ zu entnehmen.

Für  $x \rightarrow 0$  lassen sich die Werte der sphärischen Zylinderfunktionen  $j_n(x)$  und  $y_n(x)$  aus ihren asymptotischen Darstellungen ermitteln. Für  $x \ll 1$  gilt nach /13/

$$j_n(x) = \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \quad (4-3.2)$$

$$y_n(x) = \frac{(-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{x^{n-1}} \quad (4-3.3)$$

Damit erhält man

$$j_n(x=0) = \begin{cases} 1 & ; n=0 \\ 0 & ; n \geq 1 \end{cases} \quad (4-3.4)$$

$$y_n(x \rightarrow 0) \rightarrow -\infty \quad (4-3.5)$$

Abbildung 5 zeigt die sphärische Besselfunktion  $j_n(x)$ ,  
Abbildung 6 die sphärische Neumannfunktion  $y_n(x)$  für  
verschiedene Ordnungen  $n$ .

Zu einem späteren Zeitpunkt wurde in /14/ ein ähnliches  
Verfahren zur direkten Bestimmung der sphärischen Zylinderfunktionen gefunden.

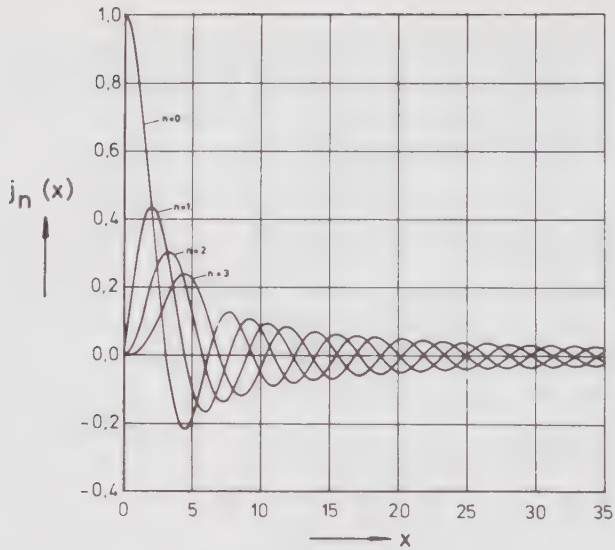


Abb. 5: Sphärische Besselfunktion  $j_n(x)$

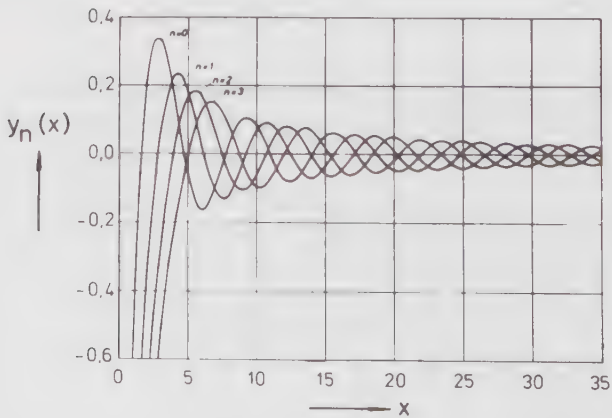


Abb. 6: Sphärische Neumannfunktion  $y_n(x)$

## 5. Ergebnisse

Nach den in Abschnitt 3 hergeleiteten Beziehungen ist das Spannungsfeld innerhalb und außerhalb der Kugel sowohl von den Schallgeschwindigkeiten beider Medien als auch von der Kreisfrequenz  $\omega$  der einfallenden Welle abhängig. Um die Abhängigkeit des Spannungsfeldes innerhalb der Kugel von der Kreisfrequenz  $\omega$  und damit von dem in Gleichung (4-1.1) definierten Parameter  $D/\lambda_2$  zu ermitteln, wurden für ein konstantes Medium 1 (Aluminium) und verschiedene Kugelmedien mit unterschiedlichen Schallgeschwindigkeiten entsprechende Parameterstudien durchgeführt. Die für die Rechnungen benötigten Daten sind /15/ entnommen und in der Tabelle 2 zusammengefaßt.

| Material   | $c_k$<br>m/s | $c_s$<br>m/s | $\rho$<br>g/cm <sup>3</sup> |
|------------|--------------|--------------|-----------------------------|
| Aluminium  | 6300         | 3080         | 2.7                         |
| Zinn       | 3320         | 1670         | 7.3                         |
| Polystyrol | 2350         | 1120         | 1.1                         |
| Blei       | 2160         | 700          | 11.4                        |

Tabelle 2: Schallgeschwindigkeiten verschiedener Materialien nach /15/.

Bevor näher auf die für die verschiedenen Materialkombinationen erhaltenen Ergebnisse eingegangen wird, sei eine allgemeine Bemerkung zu den folgenden Abbildungen vorausgeschickt.<sup>1)</sup> In ihnen sind, sofern nichts anderes ange-

1) Die meisten Abbildungen wurden mit Hilfe der Plottersoftware des Telefunken Rechners TR 440 erstellt. Aus diesem Grunde sind in den Abbildungen einige Größen anders als im vorliegenden Text bezeichnet. Es bedeuten:  
 SIGMA RR =  $\sigma_{rr}$  ; SIGMA PP =  $\sigma_{pp}$  ;  
 SIGMA TT =  $\sigma_{\theta\theta}$  ; SIGMA RT =  $\sigma_{r\theta}$  ;  
 R/RADIUS =  $r/R_0$  ; D/L =  $D/\lambda_2$  .

geben ist, die Beträge der komplexen Spannungszeiger, normiert auf  $\sigma_m$  aus Gleichung (3-3.2), dargestellt. Die Abbildungen zeigen damit nicht die augenblickliche Spannungsverteilung zu einem Zeitpunkt  $t = \text{const.}$ , sondern sie geben die innerhalb einer Periode  $T = 2\pi/\omega$  an einem bestimmten Ort  $\vec{r}$  auftretenden maximalen physikalischen Spannungen an. Diese Darstellung wurde gewählt, damit aus den Abbildungen unmittelbar abgelesen werden kann, wo die maximalen Spannungen auftreten. Eine Darstellung der augenblicklichen Spannungsverteilung zu einem Zeitpunkt  $t$  erhält man entsprechend der Festlegung in Abschnitt 3.3, indem man die Beträge der komplexen Spannungszeiger unter Berücksichtigung ihrer Phasendifferenz  $\varphi_0$  gegenüber der einfallenden Welle, ausgedrückt durch den Faktor  $e^{i\varphi_0}$ , mit dem Zeitfaktor  $e^{-i\omega t}$  multipliziert und dann nur den Imaginärteil der komplexen Spannung betrachtet.

Eine ausführliche Darstellung der erzielten Ergebnisse soll für die Materialkombination Aluminium - Polystyrol gegeben werden. Die Abbildungen 7 bis 18 vermitteln lediglich einen qualitativen Überblick über das Spannungsfeld innerhalb der Kugel. Für verschiedene Werte des Parameters  $D/\lambda_2$  sind die Beträge der normierten komplexen Spannungszeiger  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  und  $\sigma_{r\vartheta}$  in der  $r\vartheta$ -Ebene dargestellt. Wie den Abbildungen 7 bis 10 für  $D/\lambda_2 = 1$ , den Abbildungen 11 bis 14 für  $D/\lambda_2 = 10$  und den Abbildungen 15 bis 18 für  $D/\lambda_2 = 50$  zu entnehmen ist, treten die Maximalwerte der Beträge der komplexen Spannungszeiger  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  und  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  für alle Werte des Parameters  $D/\lambda_2$  stets auf der Mittelachse der Kugel auf, während der Maximalbetrag des komplexen Spannungszeigers  $\sigma_{r\vartheta}$  für  $D/\lambda_2 = 1$  bei  $\vartheta \approx 90$  Grad auftritt und dann mit zunehmendem  $D/\lambda_2$  zur Mittelachse hin wandert. Auf der Mittelachse selbst ist aus Gründen der Symmetrie der Betrag des Spannungszeigers  $\sigma_{r\vartheta}$  gleich Null. Da lediglich die

Maximalwerte der Spannungszeiger von Bedeutung sind, können die quantitativen Aussagen auf die Mittelachse der Kugel beschränkt bleiben.

In den Abbildungen 19 bis 25 sind für verschiedene Werte des Parameters  $D/\lambda_2$  die normierten Beträge der komplexen Spannungszeiger  $\sigma_{rr}$  und  $\sigma_{\varphi\varphi}$  auf der Mittelachse aufgetragen. Wegen der Symmetrie der Anordnung gilt dort  $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$ . Den Abbildungen ist zu entnehmen, daß mit zunehmendem  $D/\lambda_2$  die Beträge der Spannungszeiger ebenfalls größer werden. Während bei kleinen Werten des Parameters  $D/\lambda_2$  die maximalen Beträge der komplexen Spannungen an unterschiedlichen Stellen auf der Mittelachse zu finden sind, treten dann mit wachsendem  $D/\lambda_2$  die Maximalwerte erwartungsgemäß immer deutlicher in zwei Bereichen auf. Für  $D/\lambda_2 > 30$  (Abbildungen 24 und 25) sind herausragende Maximalwerte aber nur noch in einem Bereich zu finden. Die letzte Feststellung scheint zunächst in Widerspruch zur Theorie zu stehen. Definiert man

$$n_1 = \frac{c_{k1}}{c_{k2}} \quad (5-1)$$

$$n_2 = \frac{c_{k1}}{c_{s2}} \quad (5-2)$$

als Brechungsindizes für die Kompressions- bzw. Scherwelle, so erhält man unter der Voraussetzung eines hinreichend großen Verhältnisses von Kugeldurchmesser zur Wellenlänge durch Anwendung des optischen Brechungsgesetzes für die Materialkombination Aluminium - Polystyrol den in Abbildung 26 gezeigten Strahlengang. Aus der Abbildung ist zu ersehen, daß bei dieser Materialkombination sowohl für die Kompressionswelle im Bereich um  $r/R_0 = 0.5$  als auch für die Scherwelle im Bereich um  $r/R_0 = 0.2$  eine Fokussierung der Wellen und damit zwei Bereiche mit lokalen Spannungsüberhöhungen zu erwarten sind. Dabei liegt der Fokussierungsbereich der Scherwelle wegen des größeren Brechungsindex näher am Mittelpunkt der Kugel als der entsprechende Bereich der Kompressionswelle. Der scheinbare Widerspruch zwischen Theorie und Rechnung löst sich jedoch auf, wenn man bei gleichen  $D/\lambda_2$ -Werten wie in den Abbildungen 19 bis 25 jeweils die Spannungen betrachtet, die nur durch die Kompressions- bzw. nur durch die Scherwelle bewirkt werden. In den Abbildungen 27 bis 33 sind die normierten Beträge der Spannungszeiger  $\sigma_{rr}$  und  $\sigma_{\varphi\varphi}$  auf der Mittelachse aufgetragen, die durch die Kompressionswelle innerhalb der Kugel hervorgerufen werden. Mit zunehmendem  $D/\lambda_2$  werden die Beträge der Spannungszeiger größer und es beginnt sich ab  $D/\lambda_2 > 5$  im Fokussierungsbereich der Kompressionswelle bei  $r/R_0 = 0.5$  ein absolutes Maximum herauszubilden. Neben diesem absoluten Maximum als Folge der Fokussierung sind noch viele kleinere relative Maxima zu erkennen, die durch Mehrfachreflexionen der Kompressionswelle an der Grenzfläche zwischen den beiden Medien bedingt sind. Die Abbildungen 34 bis 40 dagegen zeigen die normierten Beträge der Spannungszeiger  $\sigma_{rr}$  und  $\sigma_{\varphi\varphi}$ , die durch die Scherwelle im Inneren der Kugel auf der Mittelachse verursacht werden. Zunächst werden die Beträge der Spannungszeiger mit zunehmendem  $D/\lambda_2$  größer und wiederum beginnt sich ab

$D/\lambda_2 > 5$ , jetzt aber im Fokussierungsbereich der Scherwelle bei  $r/R_0 = 0.2$ , ein absolutes Maximum herauszubilden. Neben diesem absoluten Maximum als Folge der Fokussierung der Scherwelle fällt besonders ein zweites Maximum im Bereich um  $r/R_0 = -0.25$  auf. Hier wird wiederum der Einfluß der rückwärtigen Grenzfläche auf das Spannungsfeld deutlich, denn die Lage dieses Maximums ist mit der Reflexion der Scherwelle an dieser Grenzfläche zu erklären, wie aus Abbildung 26 zu ersehen ist. Die übrigen, jedoch dem Betrage nach wesentlich kleineren Extremwerte entstehen ähnlich wie bei der Kompressionswelle durch Mehrfachreflexionen. Zu beachten ist aber, daß bei weiter steigendem  $D/\lambda_2$  zwar die Lage der Maximalwerte erhalten bleibt, die absoluten Werte aber jetzt wieder kleiner werden. Für  $D/\lambda_2 = 50$  können die Spannungen, die durch die Scherwelle im Inneren der Kugel hervorgerufen werden, gegenüber den Spannungen infolge der Kompressionswelle vernachlässigt werden. Dies ist der Grund dafür, daß bei der komplexen Überlagerung der Spannungen für große  $D/\lambda_2$  - Werte das durch die Scherwelle hervorgerufene Spannungsmaximum nicht mehr zu erkennen ist.

Zur Vervollständigung der Aussagen über die räumliche Verteilung des Spannungsmaximums als Folge der Fokussierung der Kompressionswelle soll noch die  $\vartheta$ -Abhängigkeit der Spannungen für  $r/R_0 = 0.5$  angegeben werden. Wie den Abbildungen 41 bis 43 zu entnehmen ist, treten die Maximalwerte der Beträge der Spannungszeiger  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  und  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  bei  $\vartheta = 0$  Grad auf. Mit zunehmendem  $D/\lambda_2$  fallen sie dann wegen der besseren Fokussierung der Kompressionswelle in immer engeren Bereichen um die Mittelachse herum ab. Abbildung 44 schließlich zeigt die  $\vartheta$ -Abhängigkeit des Betrages des Spannungszeigers  $\sigma_{r\vartheta}$ .

Für die Beurteilung der Fokussierung ist es ferner notwendig festzustellen, ob die physikalisch wirksamen Spannungen zum gleichen Zeitpunkt innerhalb einer Periode  $T$  ihren Maximalwert annehmen. Dazu ist in Abbildung 45 für verschiedene Werte des Parameters  $D/\lambda_2$  am Ort  $r/R_0 = 0.5$ ,  $\vartheta = 0$  Grad (dies entspricht dem Fokussierungsbereich der Kompressionswelle), die Lage der komplexen Spannungszeiger  $\sigma_{rr}$  und  $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\vartheta\vartheta}$  in der komplexen Spannungsebene angegeben. Für  $D/\lambda_2 = 1$  beträgt die Phasenverschiebung zwischen den Zeigern etwa 130 Grad. Mit wachsendem  $D/\lambda_2$  verringert sich die Phasenverschiebung, für  $D/\lambda_2 = 10$  liegt sie bei etwa 17 Grad und für  $D/\lambda_2 > 30$  beträgt sie weniger als 1 Grad. Dies bedeutet, daß bei hinreichend großen Werten des Parameters  $D/\lambda_2$  alle physikalisch wirksamen Spannungen nahezu gleichzeitig ihren Maximalwert annehmen.

Abschließend sind in der Tabelle 3 für die Materialkombination Aluminium - Polystyrol die normierten Maximalbeträge der komplexen Spannungszeiger  $\sigma_{rrm}$  und  $\sigma_{\varphi\varphi m} = \sigma_{\vartheta\vartheta m}$  auf der Mittelachse für verschiedene Werte des Parameters  $D/\lambda_2$  zusammengefaßt. Gleichzeitig ist der Tabelle zu entnehmen, an welchen Stellen  $r/R_0$  diese Werte auftreten.

| $D/\lambda_2$ | $\sigma_{rrm}$ | $r/R_0$ | $\sigma_{\varphi\varphi m}$ | $r/R_0$ |
|---------------|----------------|---------|-----------------------------|---------|
| 1             | 0.63           | 0.40    | 0.80                        | -0.30   |
| 5             | 3.91           | 0.13    | 2.59                        | 0.39    |
| 10            | 5.14           | 0.43    | 4.13                        | 0.46    |
| 15            | 7.79           | 0.44    | 6.69                        | 0.42    |
| 30            | 9.95           | 0.49    | 7.60                        | 0.44    |
| 40            | 12.42          | 0.48    | 9.65                        | 0.48    |
| 50            | 15.33          | 0.50    | 11.77                       | 0.48    |

Tabelle 3: Normierter Maximalbetrag und Ort der auftretenden Spannungen für verschiedene  $D/\lambda_2$

Während sich bei der Materialkombination Aluminium - Polystyrol die Schallkennimpedanzen beider Medien, d.h. das Produkt aus der Dichte  $\rho$  und der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_k$ , noch erheblich unterscheiden, sind sie bei der Kombination Aluminium - Blei in etwa gleich. Nach /16/ treten bei nahezu gleichen Kennimpedanzen an der Grenzfläche nur geringe Reflexionsverluste beim Auftreffen einer Kompressionswelle auf. Infolgedessen sind bei einer solchen Materialkombination im Fokussierungsbereich der Wellen vergleichsweise hohe Spannungen zu erwarten. In Abbildung 46 ist der Strahlengang nach dem optischen Brechungsgesetz für die Kombination Aluminium - Blei angegeben. Danach sind durch Fokussierung der Kompressions- bzw. Scherwelle Spannungsmaxima in den Bereichen um  $r/R_0 = 0.48$  bzw.  $r/R_0 = 0.12$  zu erwarten. Die Abbildungen 47 bis 50 zeigen für verschiedene Werte des Parameters  $D/\lambda_2$  die normierten Beträge der Spannungszeiger  $\sigma_{rr}$  und  $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$  auf der Mittelachse, hervorgerufen durch die Kompressionswelle. Mit zunehmendem  $D/\lambda_2$  werden die Beträge der Spannungszeiger größer, und es beginnt sich ab  $D/\lambda_2 \geq 5$  im Fokussierungsbereich der Kompressionswelle ein absolutes Spannungsmaximum herauszubilden. Wegen der fast gleichen Schallkennimpedanzen beider Medien sind die durch Mehrfachreflexionen hervorgerufenen übrigen relativen Maxima nur von untergeordneter Bedeutung. Die Abbildungen 51 bis 54 dagegen zeigen für gleiche  $D/\lambda_2$ -Werte die Beträge der Spannungszeiger auf der Mittelachse, die durch die Scherwelle verursacht werden. Wiederum ist festzustellen, daß die Beträge der Spannungszeiger zunächst mit zunehmendem  $D/\lambda_2$  ebenfalls größer werden und sich im Fokussierungsbereich der Scherwelle das erwartete Spannungsmaximum ausbildet. Für  $D/\lambda_2 > 20$  werden dann ähnlich wie bei der Materialkombination Aluminium - Polystyrol die Absolutbeträge der Spannungszeiger mit wachsendem  $D/\lambda_2$  schnell kleiner, ohne daß sich die relative Lage

der auftretenden Maxima zueinander ändert. Abschließend sind in den Abbildungen 55 bis 58 noch die Beträge der komplexen Spannungszeiger dargestellt, die als Summe beider Wellen innerhalb der Kugel auftreten.

Für die Abhängigkeit der Beträge der Spannungen im Fokussierungsbereich der Kompressionswelle von der Winkelkoordinate  $\vartheta$  sowie für die Phasendifferenz zwischen den Spannungszeigern ergeben sich ähnliche Ergebnisse wie bei der Kombination Aluminium - Polystyrol. Aus diesem Grunde wird auf eine graphische Darstellung der entsprechenden Kurven verzichtet.

Den bisher aufgeführten Materialkombinationen ist gemeinsam, daß die beiden durch Anwendung des optischen Brechungsgesetzes bestimmten Fokussierungsbereiche für die Kompressions- und Scherwelle ganz im Inneren der Kugel liegen. Das gilt immer dann, wenn die in den Gleichungen (5-1) und (5-2) definierten Brechungsindizes  $n_i > 2$  sind.

Bei der Materialkombination Aluminium - Zinn beträgt der Brechungsindex der Scherwelle  $n_2 = 3.8$ , während der Brechungsindex der Kompressionswelle  $n_1 = 1.9$  ist. Abbildung 59 zeigt den mit Hilfe des optischen Brechungsgesetzes berechneten Strahlengang. Der Fokussierungsbereich der Scherwelle liegt im Kugelinernen; der Fokussierungsbereich der Kompressionswelle verläuft durch die Grenzfläche zwischen der Kugel und dem umgebenden Medium.

Für diese Materialkombination sind die Beträge der komplexen Spannungszeiger  $\sigma_{rr}$  und  $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\vartheta\vartheta}$  auf der Mittelachse für verschiedene Werte des Parameters  $D/\lambda_2$  in den Abbildungen 60 bis 63 dargestellt. Während in der Abbildung 62 mit  $D/\lambda_2 = 30$  sowohl für den Fokussierungsbereich der Kompressionswelle als auch für den

der Scherwelle ein Spannungsmaximum zu erkennen ist, zeigt die Abbildung 63 mit  $D/\lambda_2 = 50$  wesentliche Spannungsüberhöhungen aus den bereits erläuterten Gründen nur noch im Fokussierungsbereich der Kompressionswelle. Wegen des vergleichsweise kleinen Brechungsindex der Kompressionswelle sowie ihrer Reflexion an der rückwärtigen Grenzfläche erstreckt sich das Maximum über einen größeren Bereich.

## 6. Zusammenfassung der Ergebnisse und Diskussion im Hinblick auf die Erzeugung lokaler Spannungsspitzen mit Hilfe eines schalloptischen Systems

Beim Auftreffen einer ebenen harmonischen Kompressionswelle auf einen elastischen sphärischen Einschuß breiten sich im Inneren des Einschlusses eine Kompressions- und eine Scherwelle aus. Unter den Voraussetzungen, daß

- die auftreffende Kompressionswelle eine größere Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzt als die Wellen in dem Einschuß und
- das Verhältnis des Kugeldurchmessers  $D$  zur Wellenlänge  $\lambda_2$  der Kompressionswelle in der Kugel hinreichend groß, etwa  $D/\lambda_2 > 10$ , ist,

werden sowohl die Kompressions- als auch die Scherwelle fokussiert. Wegen der unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten gibt es je einen Fokussierungsbereich für die Kompressions- und für die Scherwelle. Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Scherwelle kleiner als die der Kompressionswelle ist, liegt ihr Fokussierungsbereich näher am Mittelpunkt des Einschlusses als der entsprechende Bereich der Kompressionswelle. Die Lage dieser Bereiche kann mit Hilfe des optischen Brechungsgesetzes bestimmt werden, indem als Brechungsindex  $n$  das Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeit der auftreffenden Welle zur Ausbreitungsgeschwindigkeit der betrachteten Welle innerhalb der Kugel definiert wird.

Beide Wellen verursachen in dem elastischen Einschuß mechanische Spannungen. Während bei kleinen Werten des Parameters  $D/\lambda_2$  die Spannungen innerhalb der Kugel von kleinerer bzw. gleicher Größenordnung wie im umgebenden Medium sind, werden mit zunehmendem  $D/\lambda_2$  sowohl die durch die Kompressions- als auch die durch die Scherwelle

bewirkten Spannungen zunächst größer, und es bilden sich infolge Fokussierung beider Wellen lokale Spannungsspitzen aus. Die durch die Scherwelle verursachten Spannungen erreichen bei  $D/\lambda_2 \approx 30$  ein Maximum, dann werden sie mit zunehmendem  $D/\lambda_2$  dem Betrage nach schnell kleiner. Die durch die Kompressionswelle bedingten Spannungen hingegen steigen weiterhin an. Für  $D/\lambda_2 \geq 50$  kann der durch die Scherwelle bedingte Anteil an den Spannungen innerhalb des Einschlusses, verglichen mit den durch die Kompressionswelle verursachten Spannungen, vernachlässigt werden. Die Spannungen können jedoch durch stetiges Vergrößern des Parameters  $D/\lambda_2$  nicht beliebig erhöht werden, da bei sehr hohen Frequenzen den Wellen durch innere Reibung Energie entzogen und in Wärme umgewandelt wird. Solche Dämpfungseffekte werden aber von der hier zugrundegelegten linearen Theorie nicht berücksichtigt.

Obwohl für das Rechenmodell einige vereinfachende Annahmen getroffen wurden, lassen sich die erzielten Ergebnisse auf das reale schalloptische System übertragen. Während aber für die Rechnungen eine harmonische Spannungswelle angenommen wurde, entsteht beim Aufschießen einer Platte auf die Oberfläche des schalloptischen Systems im Idealfall ein Rechteckimpuls, dessen Impulsdauer proportional zur Dicke der aufschlagenden Platte ist. Damit ein großer Teil des Frequenzspektrums des Spannungsimpulses im Bereich hoher Frequenzen liegt, muß die Impulsdauer möglichst klein und die Platte somit möglichst dünn sein. Wie aus den Rechenergebnissen zu sehen ist, treten unter diesen Voraussetzungen wesentliche Spannungsüberhöhungen nur noch im Fokussierungsbereich der Kompressionswelle auf. Ferner ist darauf zu achten, daß beide Medien eine nahezu gleiche Schallkennimpedanz besitzen. Dann wird nur ein geringer Teil des einfallenden Impulses an der Grenz-

fläche reflektiert, und die Spannungsüberhöhungen treten besonders deutlich hervor. Wie Morgan /17/ gezeigt hat, weisen sphärische Linsen mit konstantem Brechungsindex im Gegensatz zu Ellipsoid-Linsen stets eine geometrische Aberration auf. Daher ist zu erwarten, daß bei einem schalloptischen System mit einer ellipsoiden Grenzfläche eine noch bessere Fokussierung auftreten wird.

# Literaturverzeichnis:

- /1/ T. Tarnoczy:  
Sound Focusing Lenses and Waveguids  
Ultrasonics  
Vol. 3 (1965) S. 115
- /2/ J. Godo:  
Theoretische Betrachtungen und experimentelle  
Untersuchungen über Polystyrol-Ultraschall-Linsen  
Dissertation Innsbruck 1968
- /3/ W.J. Toulis:  
Acoustic Focusing with Spherical Structures  
Journ. Acoust. Soc. Am.  
Vol. 35 (1963) S. 286
- /4/ C.A. Boyles:  
Theory of Focusing Plane Waves by Spherical, Liquid Lenses  
Journ. Acoust. Soc. Am.  
Vol. 38 (1965) S. 393
- /5/ A. Ziegler:  
Vorrichtung für die zerstörungsfreie Prüfung der  
Duktilität eines Werkstoffes  
unveröffentlicht
- /6/ Y.H. Pao / C.C. Mow:  
Scattering of Plane Compressional Waves by a  
Spherical Obstacle  
Journ. Applied Physics  
Vol. 34 (1963) S. 493

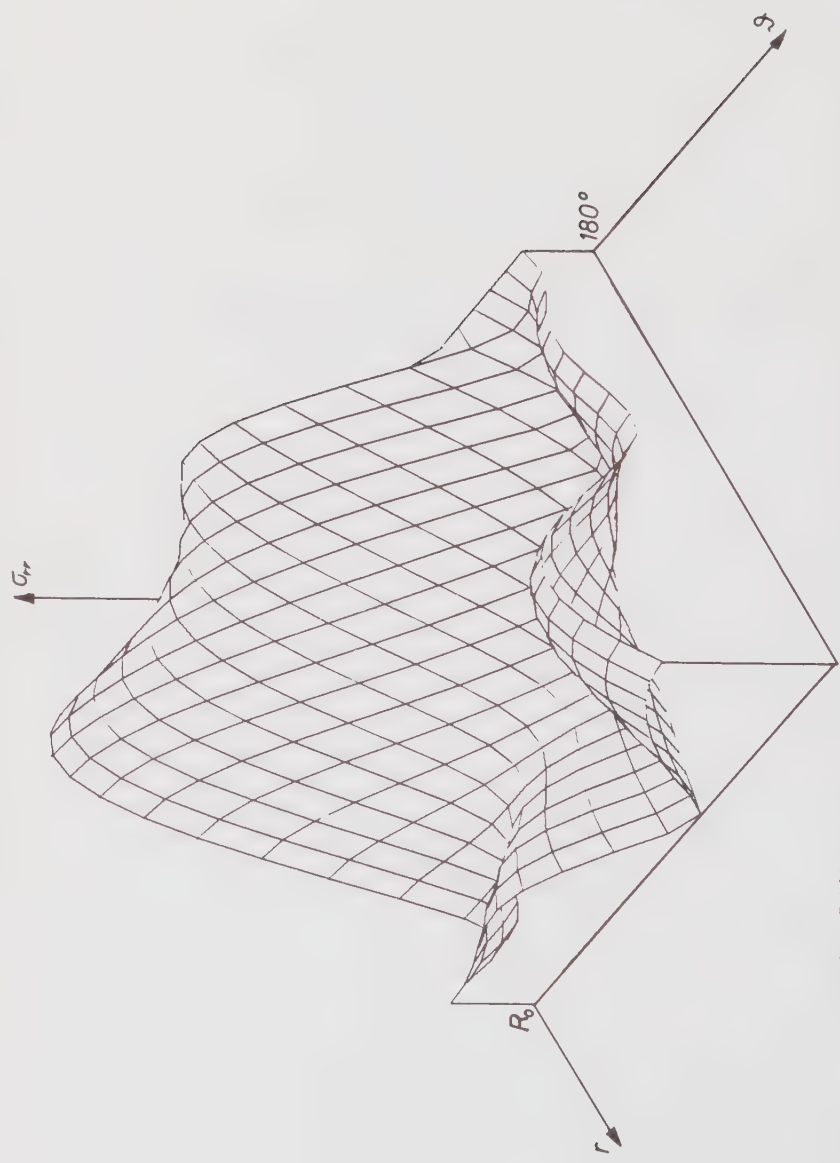
- /7/ H. Kolsky:  
Stress Waves in Solids  
Dover Publications, New York 1963
- /8/ J.D. Achenbach:  
Wave Propagation in Elastic Solids  
North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1973
- /9/ Jahnke/Emde/Lösch:  
Tafeln höherer Funktionen  
B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1966
- /10/ W. Müller:  
Theorie der elastischen Verformung  
Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1959
- /11/ E. Heine:  
Handbuch der Kugelfunktionen  
Physica Verlag Würzburg, Neudruck 1961
- /12/ M. Goldstein / R.M. Thaler:  
Recurrence Techniques for the Calculation of  
Bessel Functions  
Mathematical Tables and Other Aids to Computations  
Vol. 13 (1959) S. 102
- /13/ P.M. Morse / H. Feshbach:  
Methods of Theoretical Physics  
McGraw Hill Book Company, New York 1953
- /14/ F.J. Corbato / J.L. Uretsky:  
Generation of Spherical Bessel Functions in Digital  
Computers  
Journ. Association Computing Machinery  
Vol. 6 (1959) S. 366

- /15/ Hütte - Taschenbuch der Werkstoffkunde  
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1967
- /16/ E. Skudrzyk:  
The Foundations of Acoustics  
Springer Verlag, Wien 1971
- /17/ S.P. Morgan:  
General Solution of The Luneberg Lens Problem  
Journ. Applied Physics  
Vol. 29 (1958) S. 1358

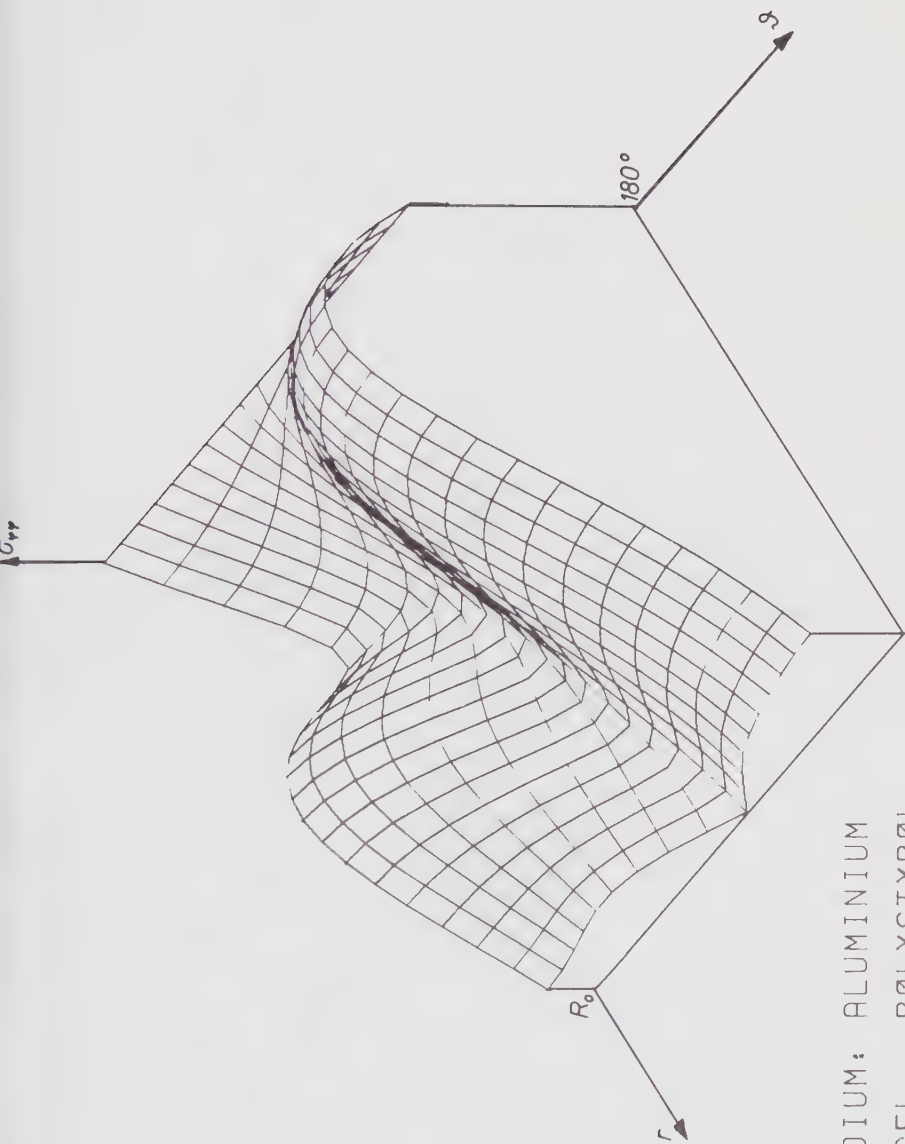


Anhang mit den Abbildungen 7 bis 63

RELIEF DER SPANNUNG SIGMA RR

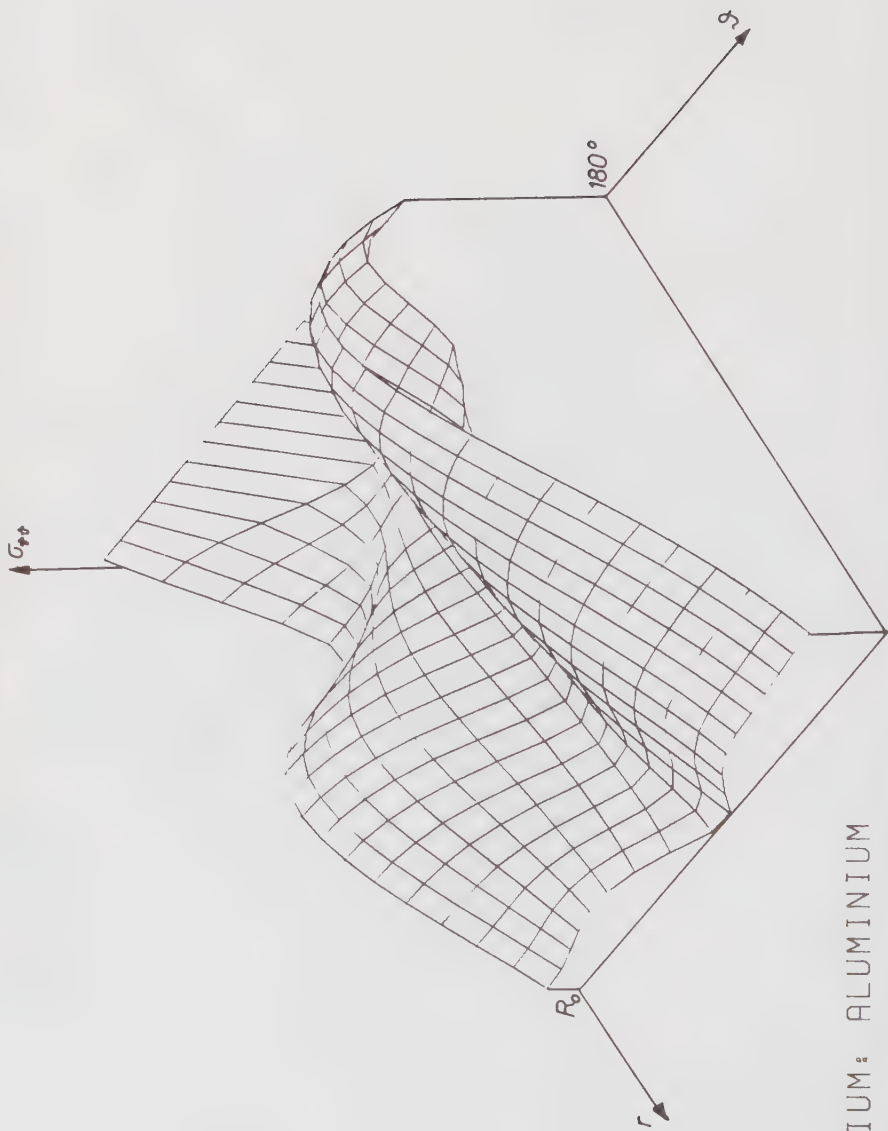


MEDIUM: ALUMINIUM  
KUGEL : POLYSTYRØL



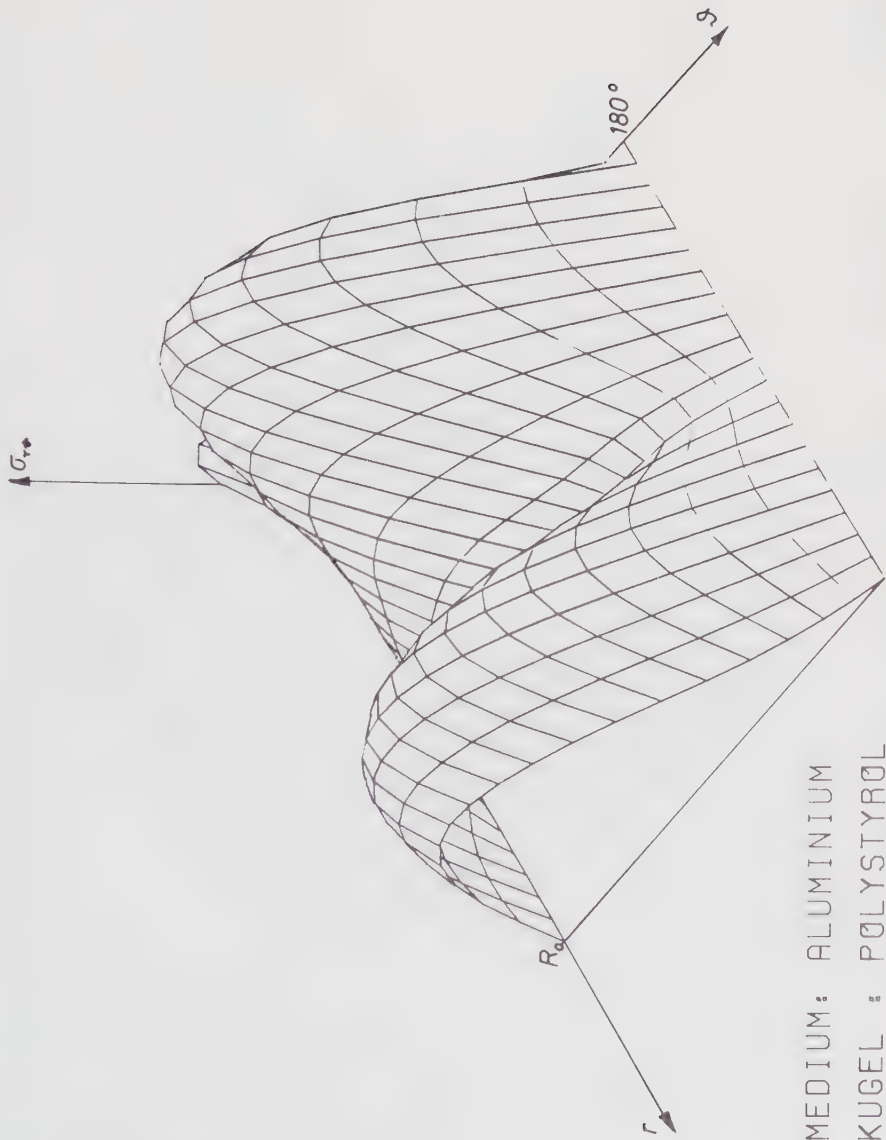
MEDIUM: ALUMINIUM  
KUGEL : PØLYSTYRØL  
D/L : 1.00

AFFLIEF DER SPANNUNG SIGMA TT



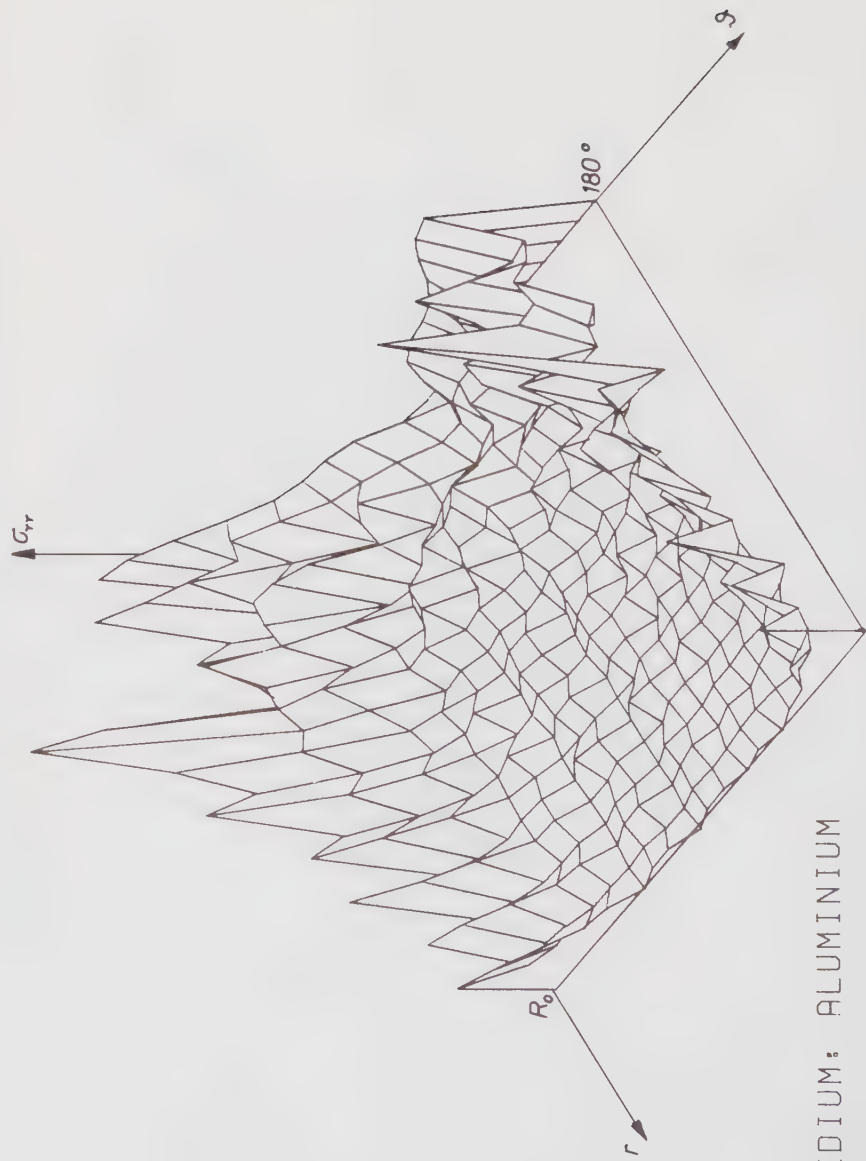
MEDIUM: ALUMINIUM  
KUGEL : POLYSTYROL

# RELIEF DER SPANNUNG SIGMA RT

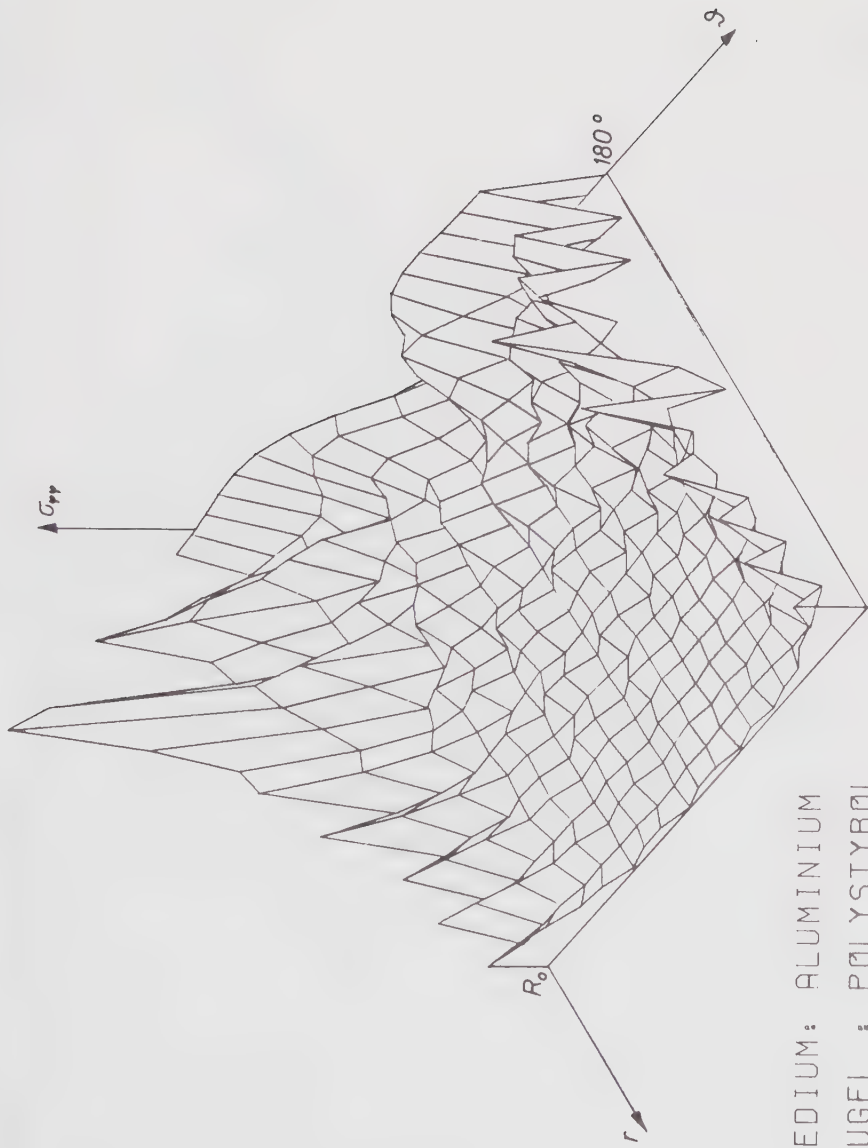


MEDIUM: ALUMINIUM  
KUGEL : POLYSTYROL  
D/L     = 1.00

# RELIEF DER SPANNUNG SIGMA RR



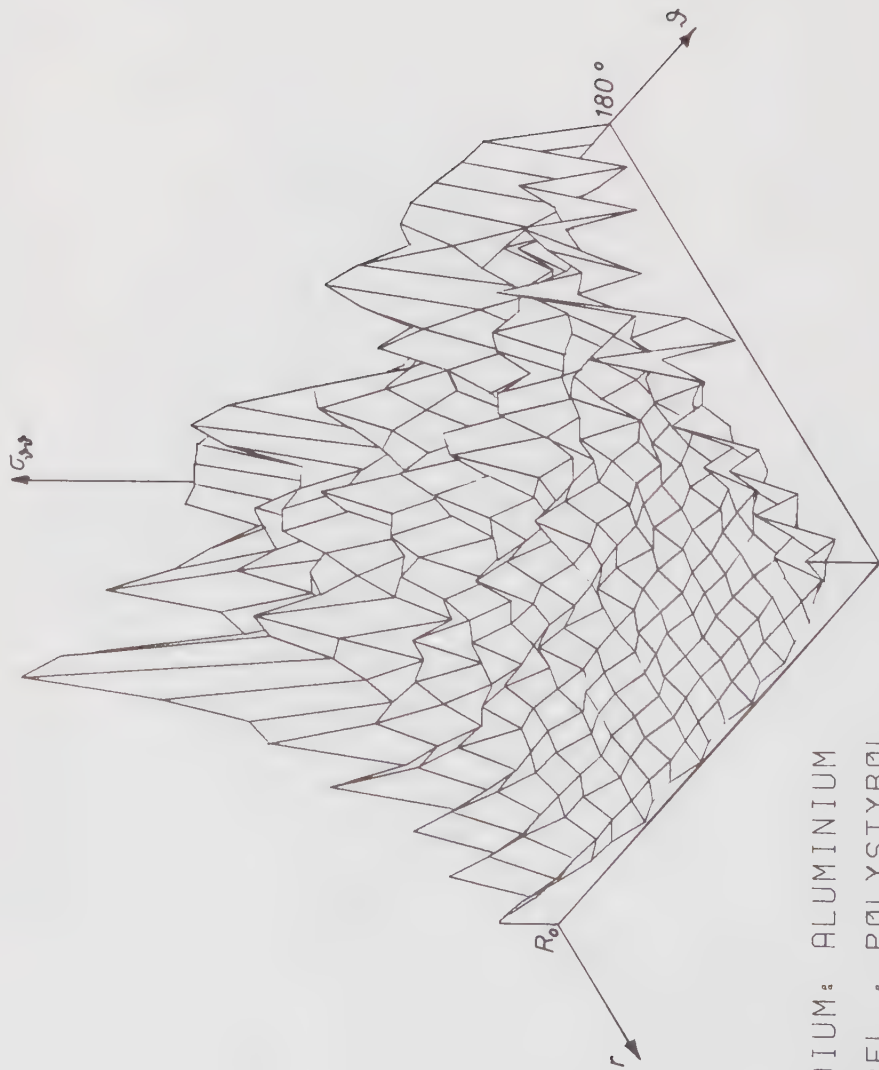
MEDIUM: ALUMINIUM  
KUGEL : POLYSTYRØL



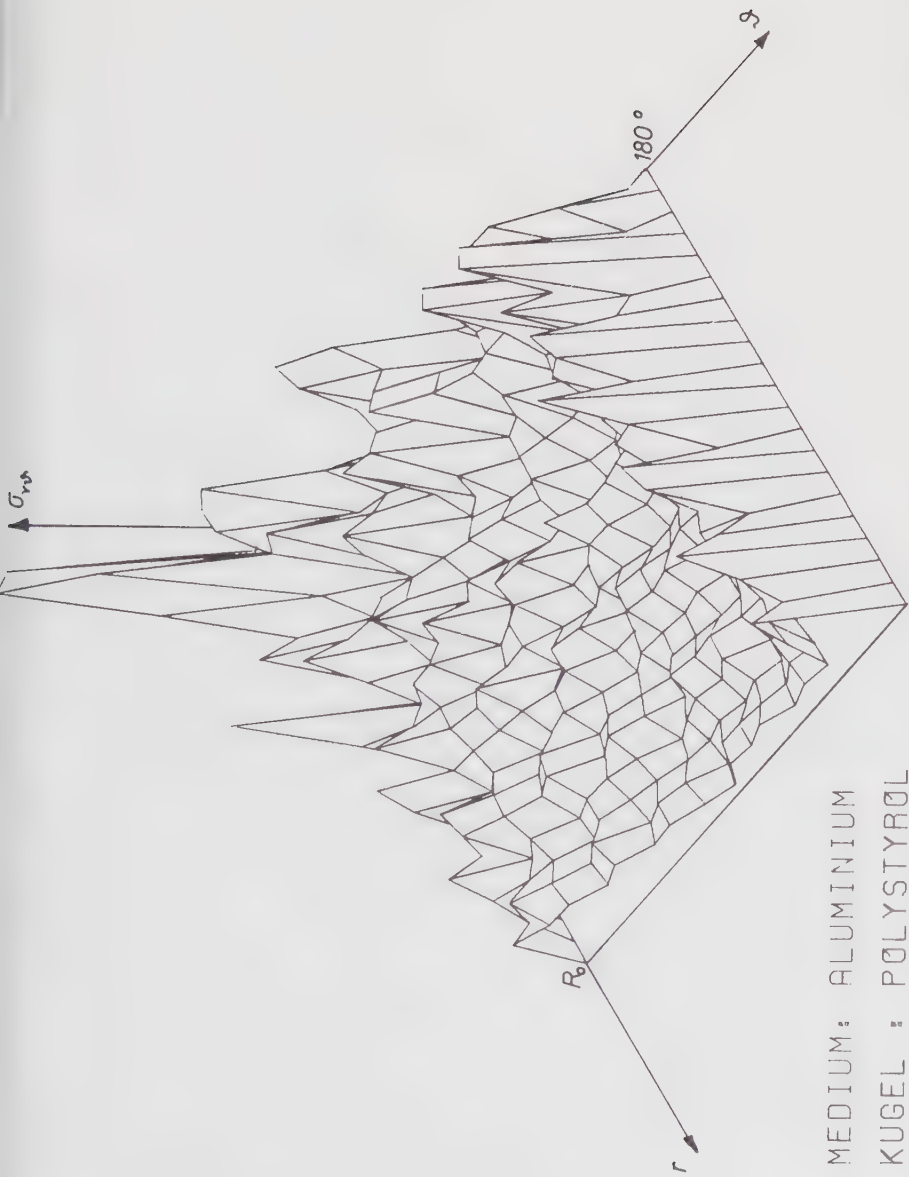
MEDIUM: ALUMINIUM  
KUGEL : PØLYSTYRØL  
D/L : 10.00

Abb. 12

# RELIEF DER SPANNUNG SIGMA TT

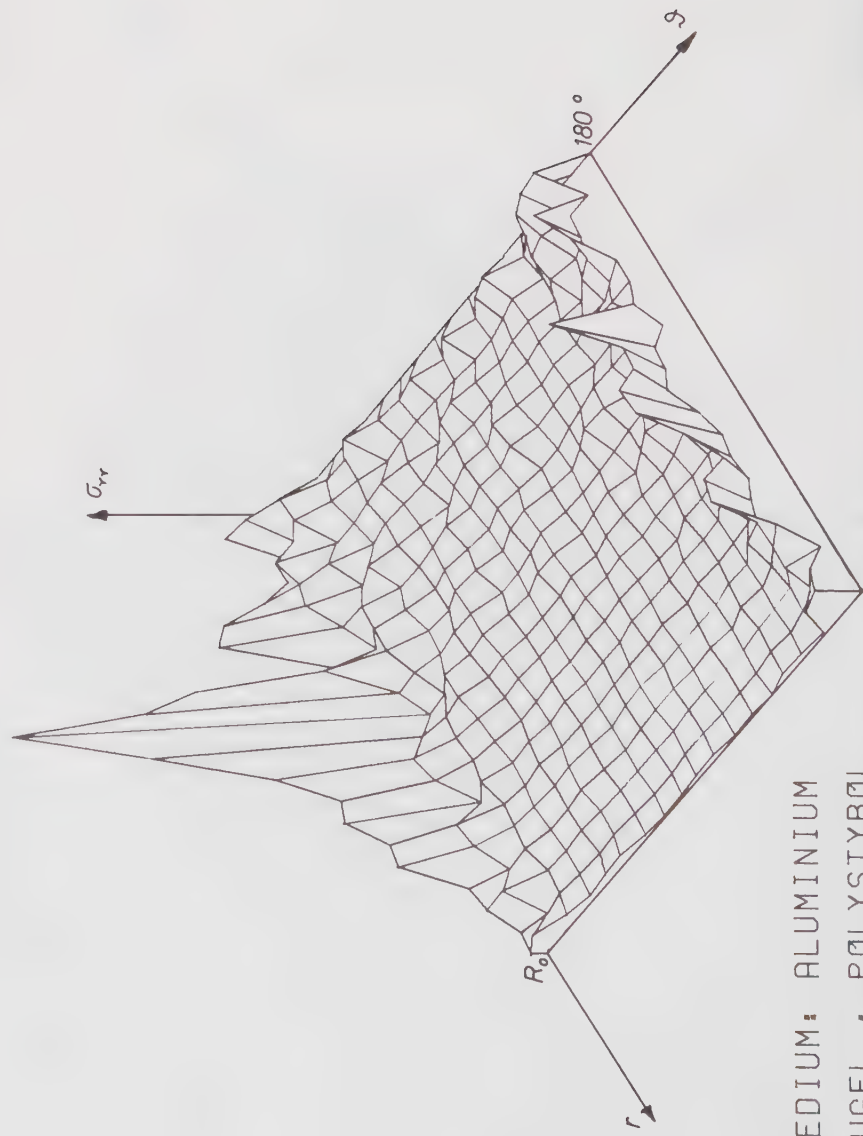


MEDIUM: ALUMINIUM  
KUGEL : PØLYSTYRØL  
D/L : 10.00



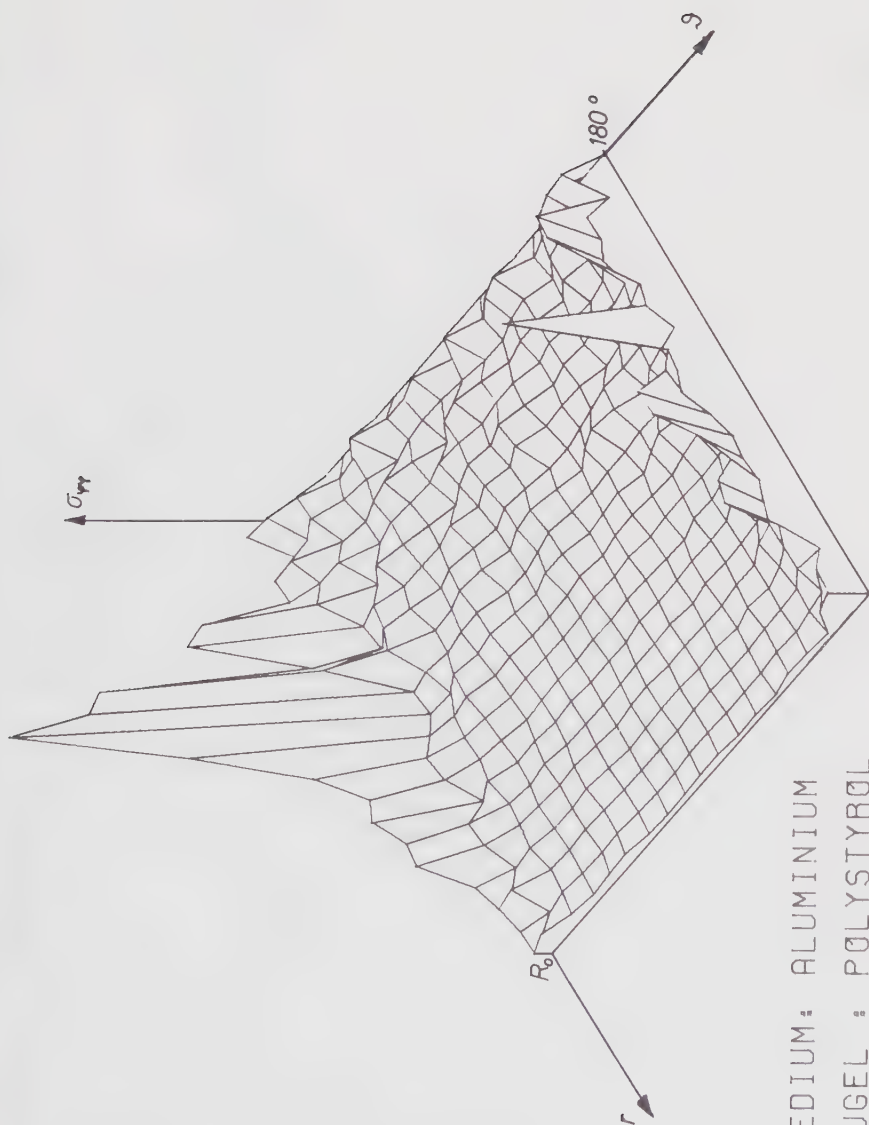
MEDIUM: ALUMINIUM  
 KUGEL : PØLYSTYRØL  
 D/L : 10.00

# RELIEF DER SPANNUNG SIGMA RR



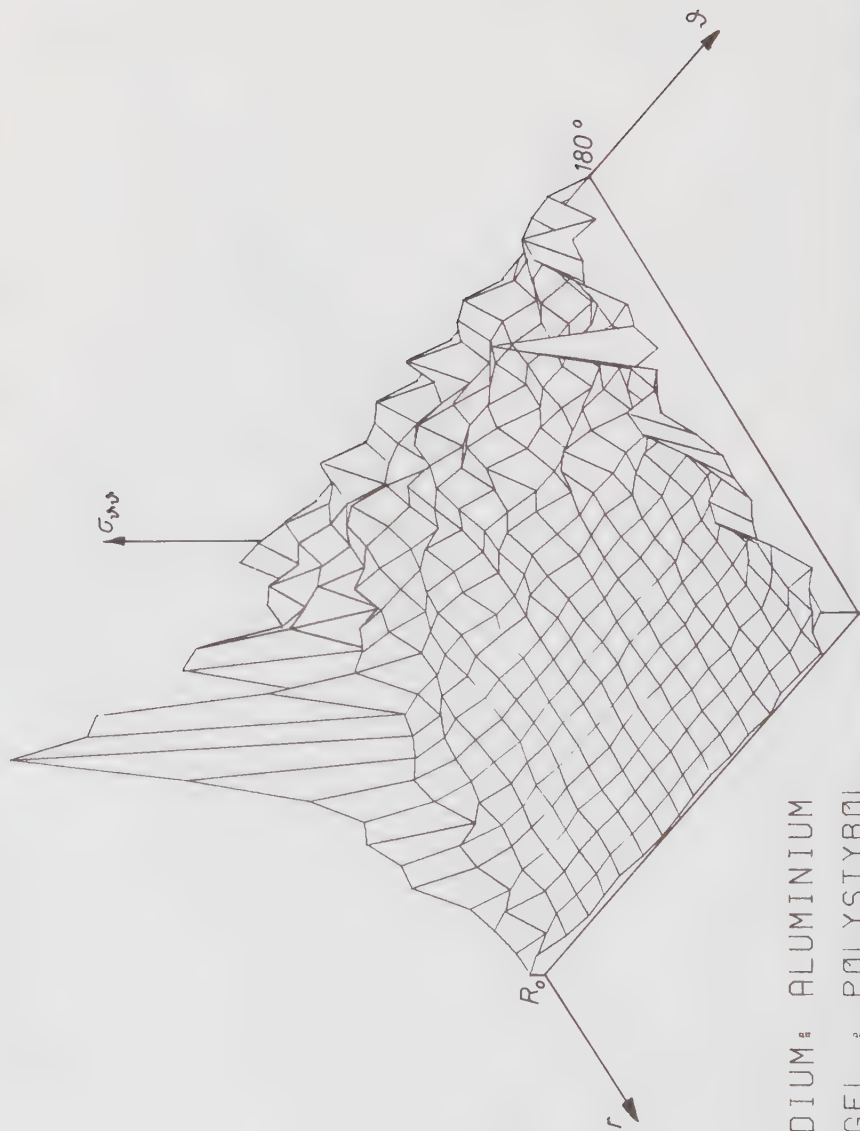
MEDIUM: ALUMINIUM

KUGEL : PÖLYSTYRØL

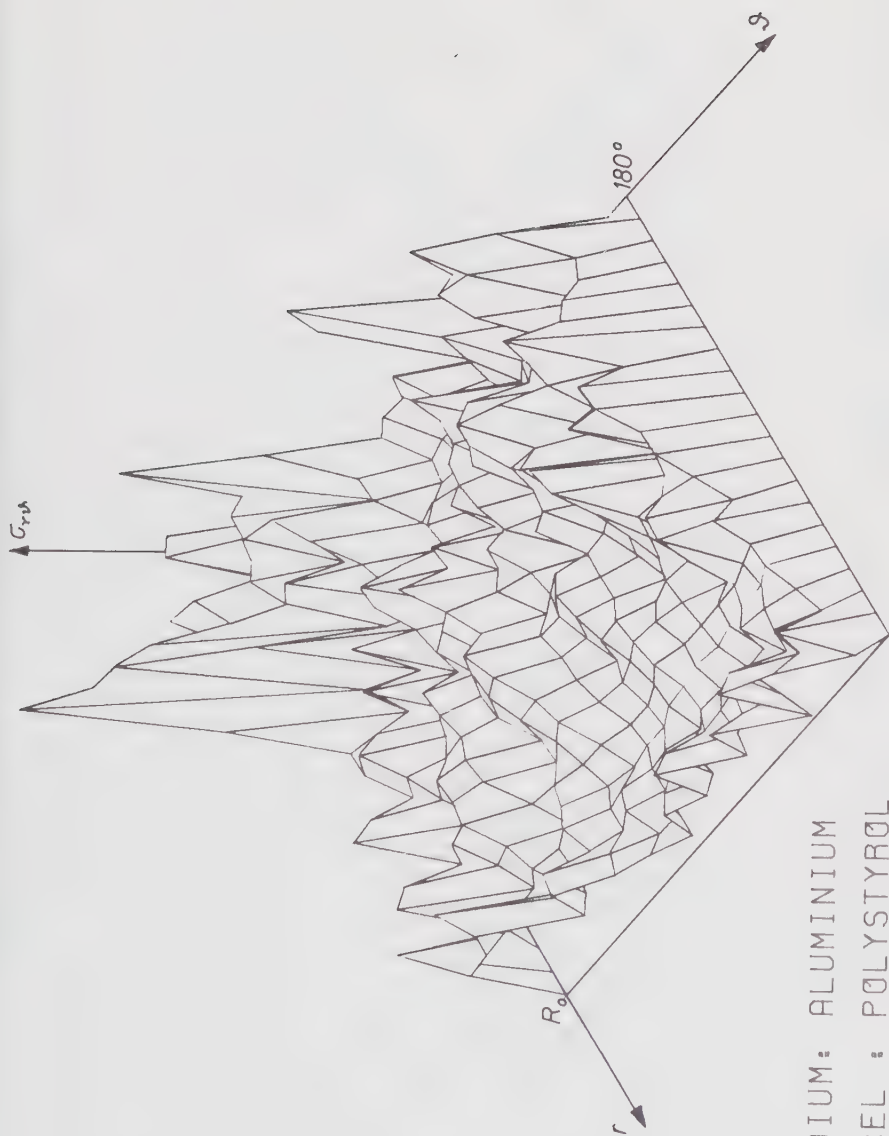


MEDIUM: ALUMINIUM  
KUGEL : PØLYSTYRØL  
D/L : 50.00

# RELIEF DER SPANNUNG SIGMA TT

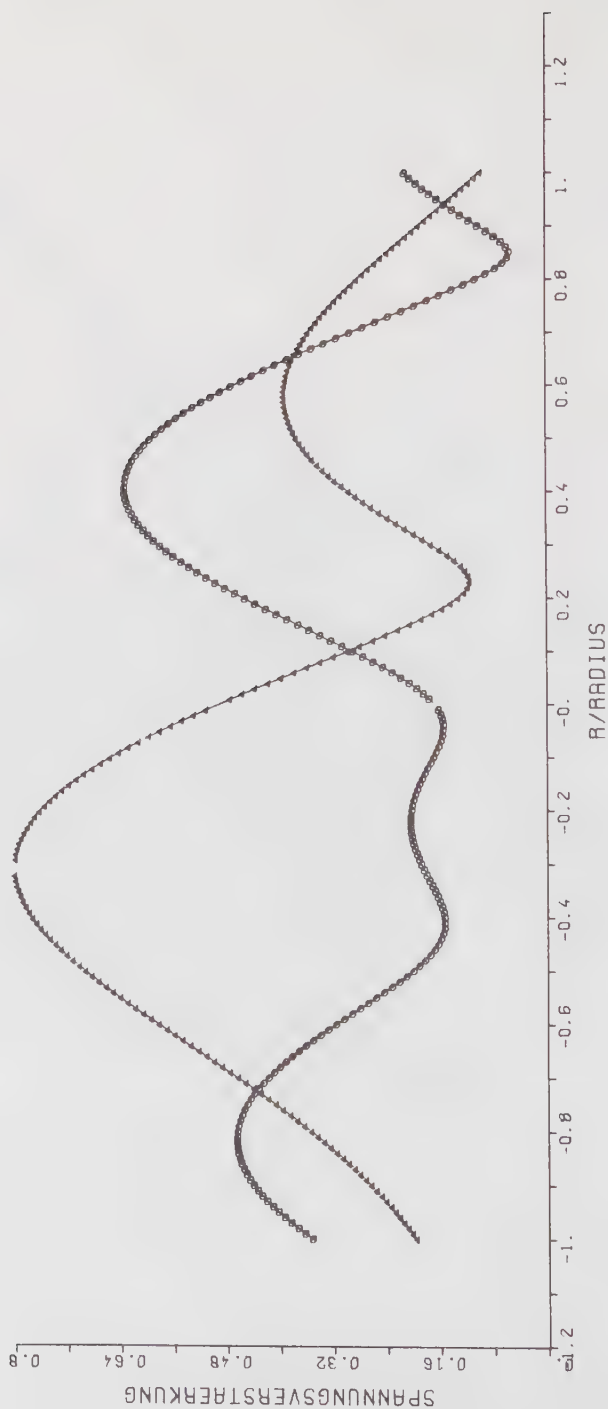


MEDIUM: ALUMINIUM  
KUGEL: POLYSTYROL



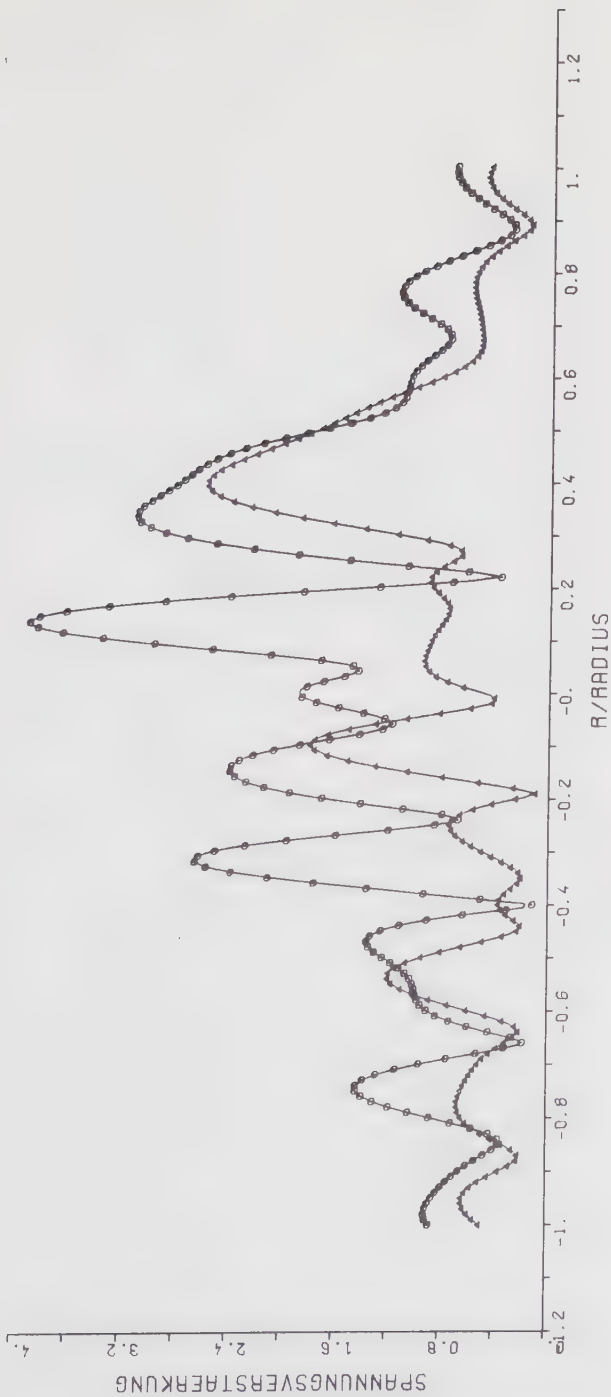
MEDIUM: ALUMINIUM  
KUGEL : POLYSTYRØL  
D/L : 50.00

# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP

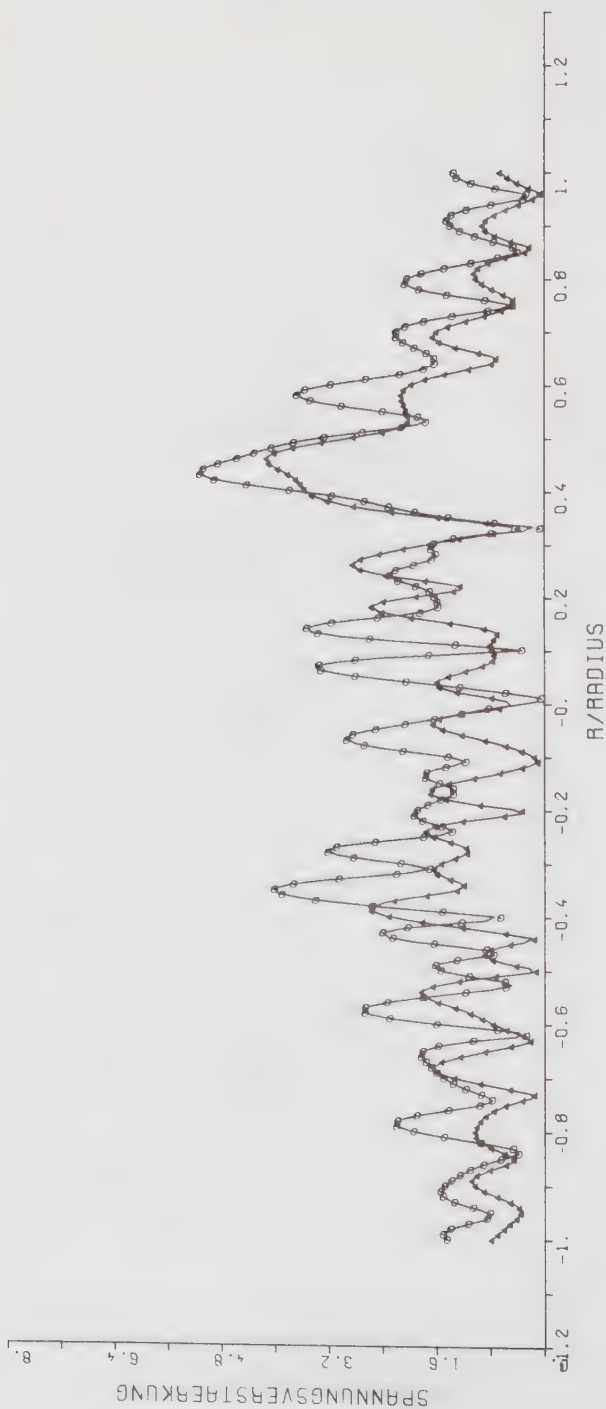


○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Polystyrol



# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP



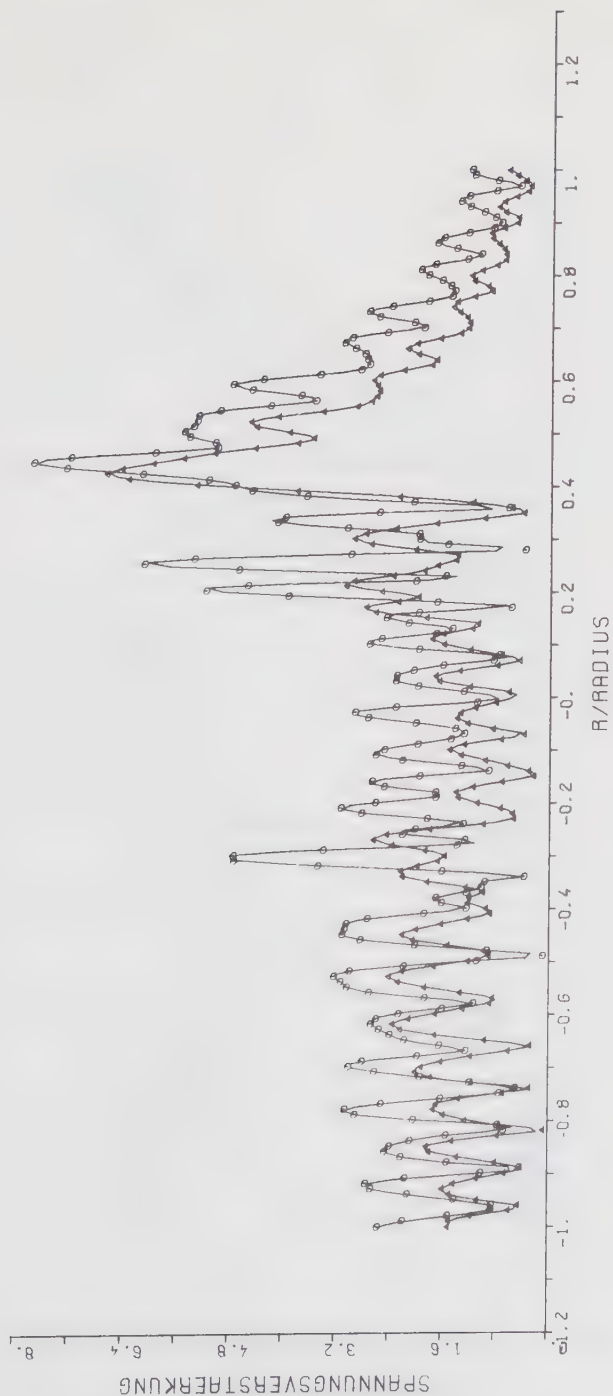
○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Polystyrol

0/2 16.0

APP 31

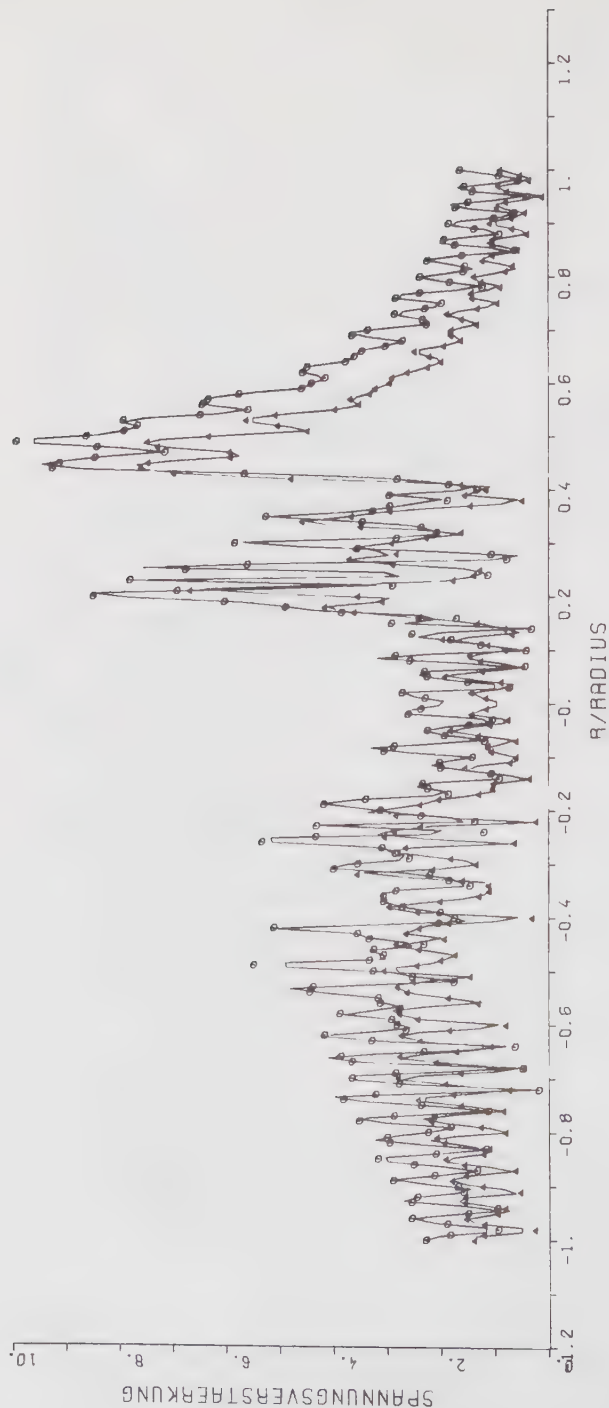
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP



○ SIGMA RR  
△ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Polystyrol  
 $D/\lambda_2 : 15.0$

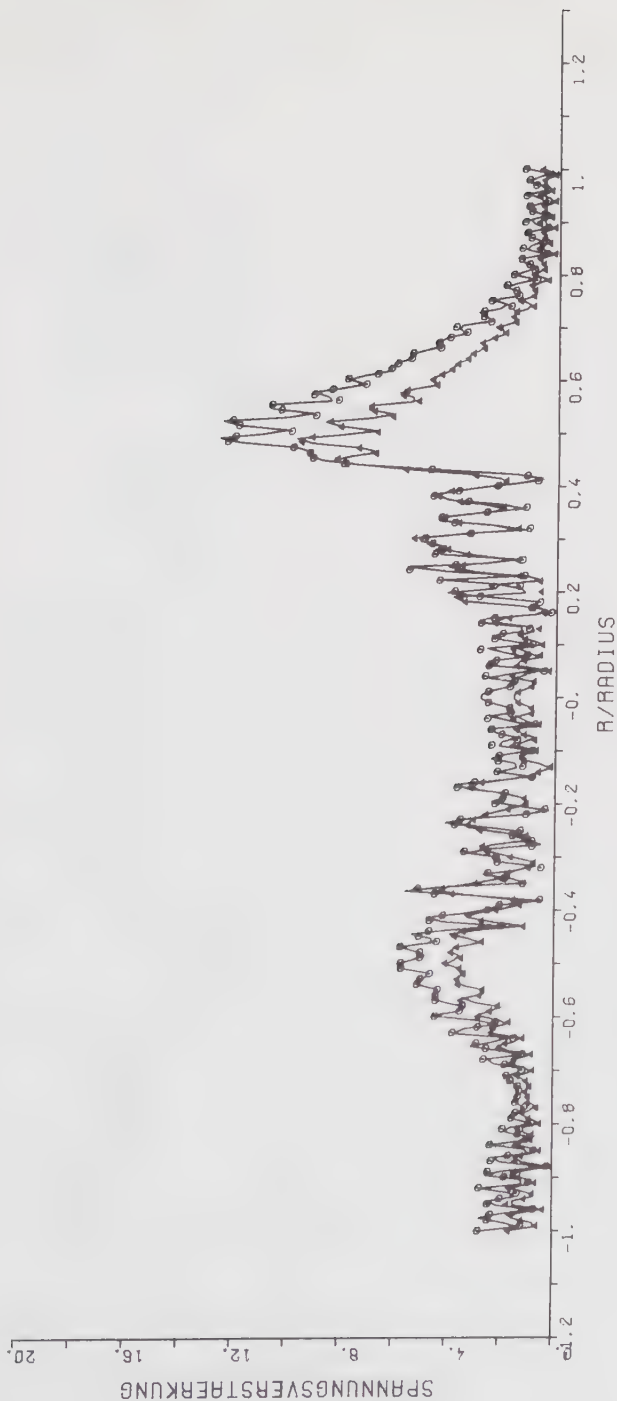
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP



■ SIGMA RR  
 ▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
 Kugel : Polystyrol  
 $\sigma/A_0$  : 30.0

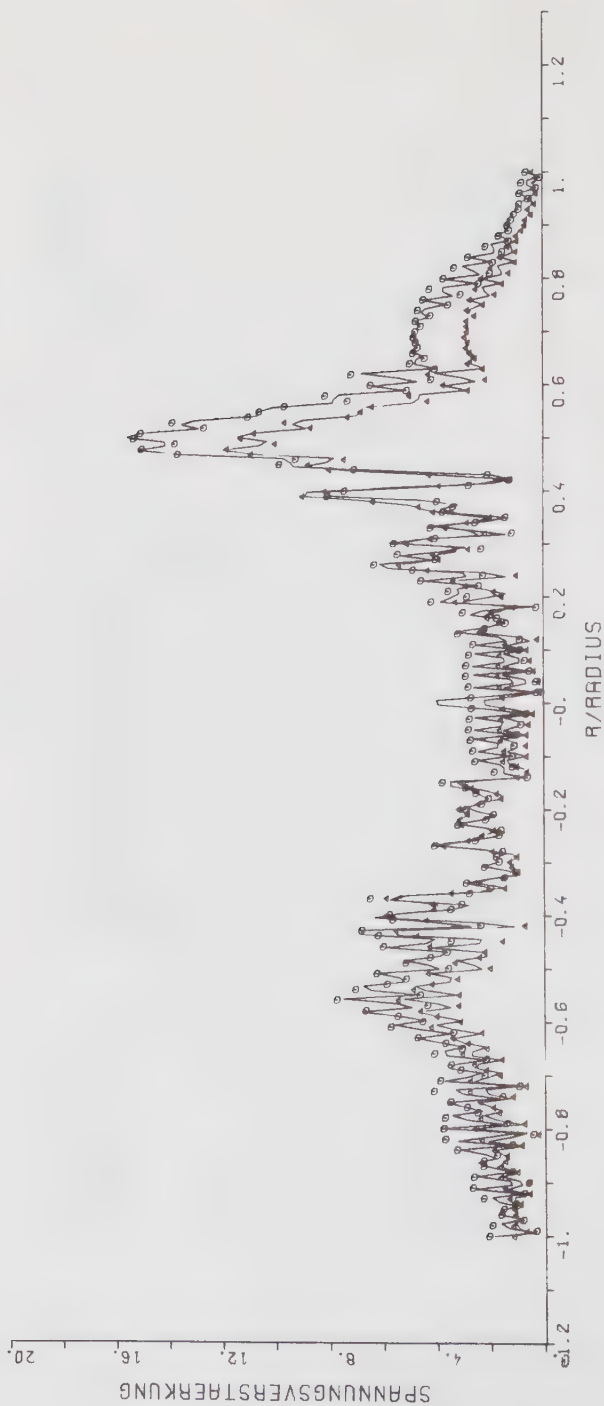
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA AA UND PP



○ SIGMA AA  
△ SIGMA PP

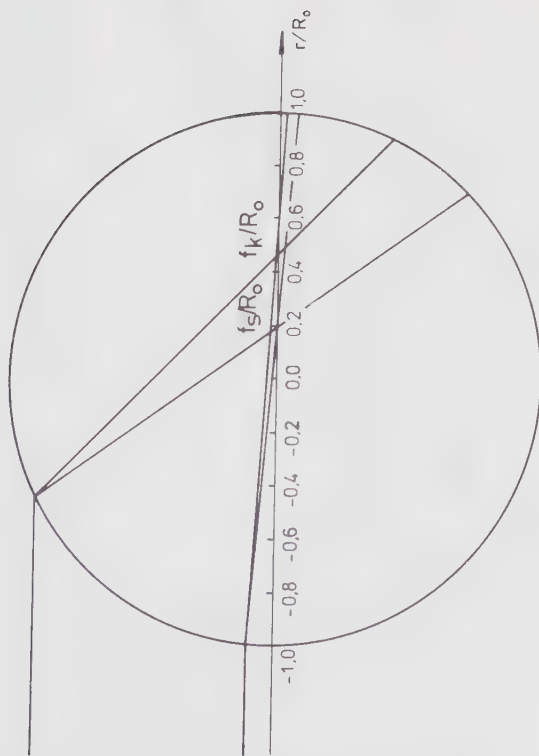
Medium : Aluminium  
Kugel : Polystyrol  
 $D/\lambda_1$  : 40.0

# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP



○ SIGMA RR  
△ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Polystyrol  
 $C, \lambda_1$  50.0



$$n_1 = 2,7$$

$$0,47 \cong f_k/R_0 \cong 0,59$$

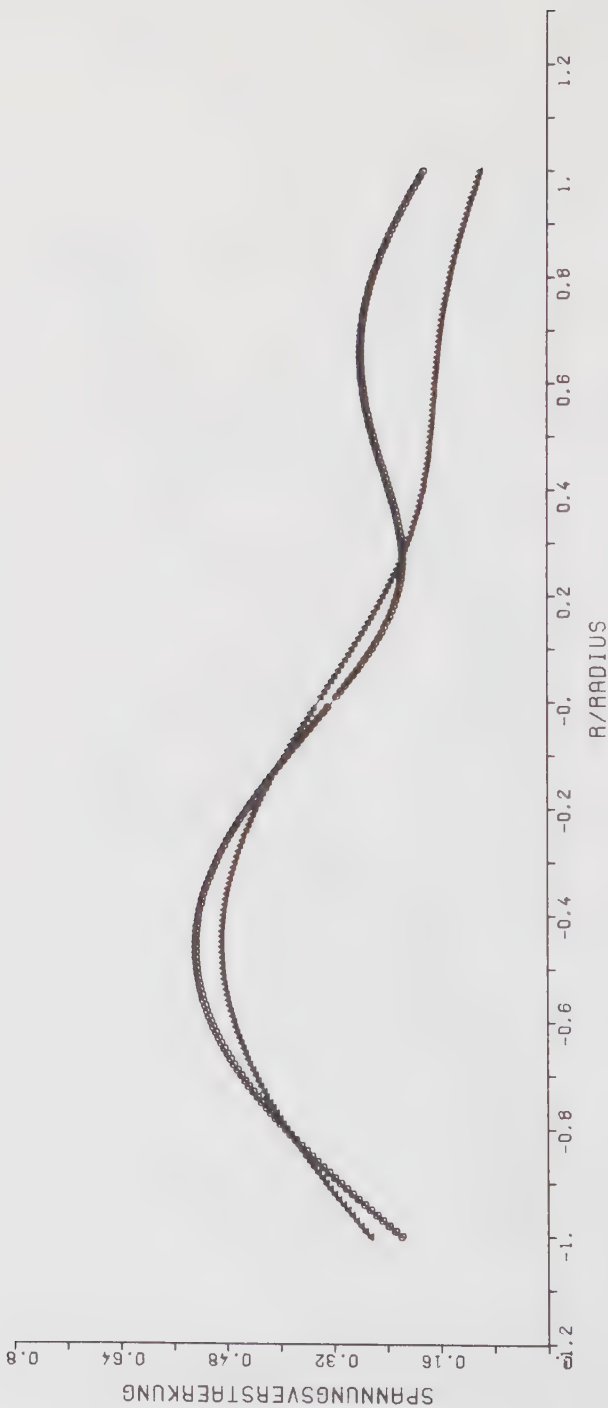
$$n_2 = 5,6$$

$$0,19 \cong f_s/R_0 \cong 0,22$$

Strahlengang nach dem Brechungsgesetz für Aluminium-Polystyrol

Abb. 26

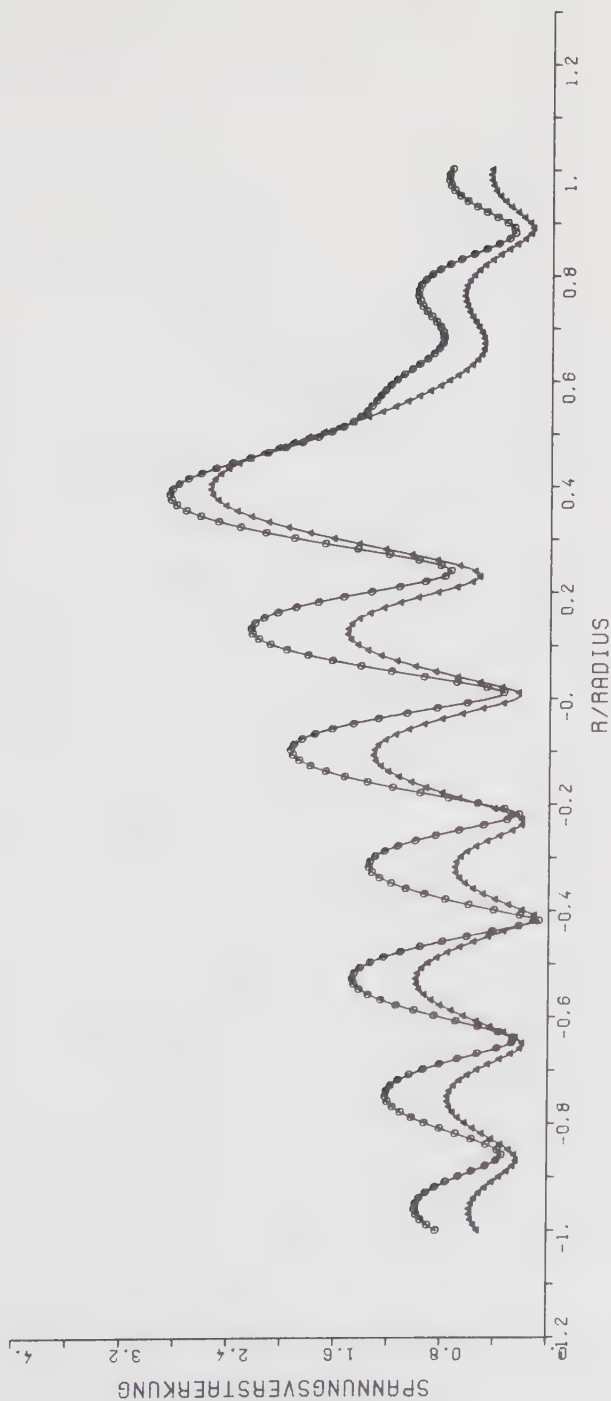
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Kompressionswelle allein



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Polystyrol  
 $\sigma_{\text{max}}/2$  : 10

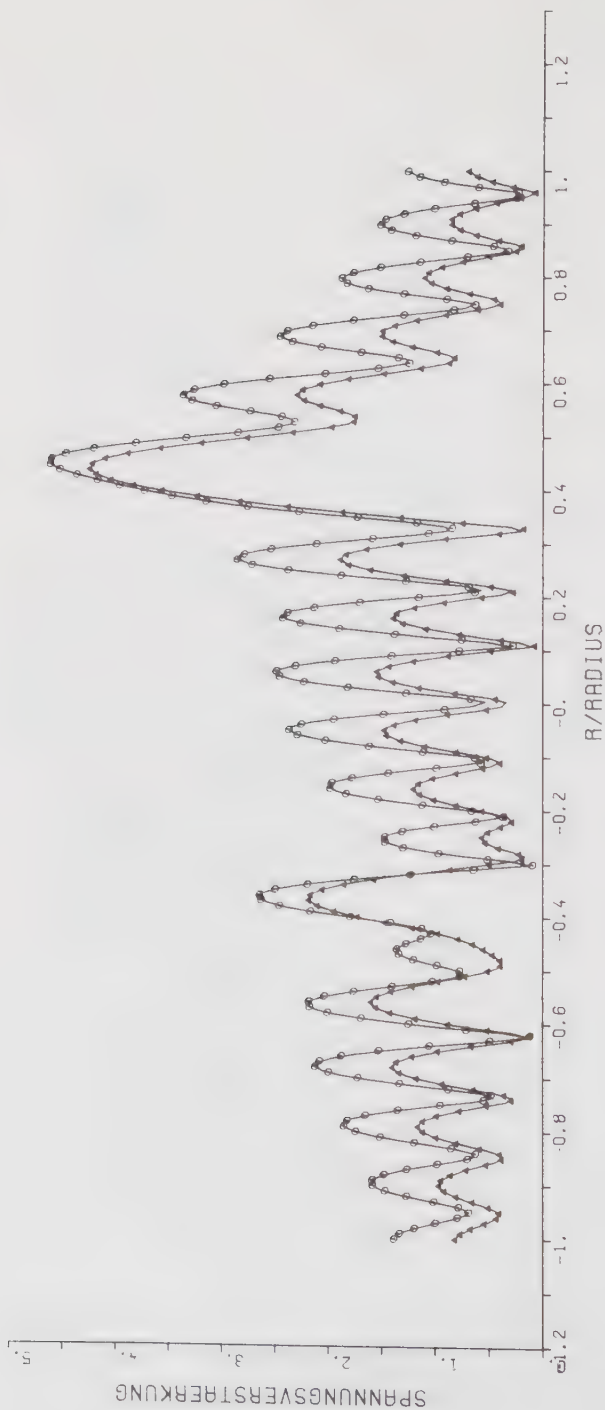
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Kompressionswelle allein



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Polystyrol  
 $D/\lambda_2$  : 5,0

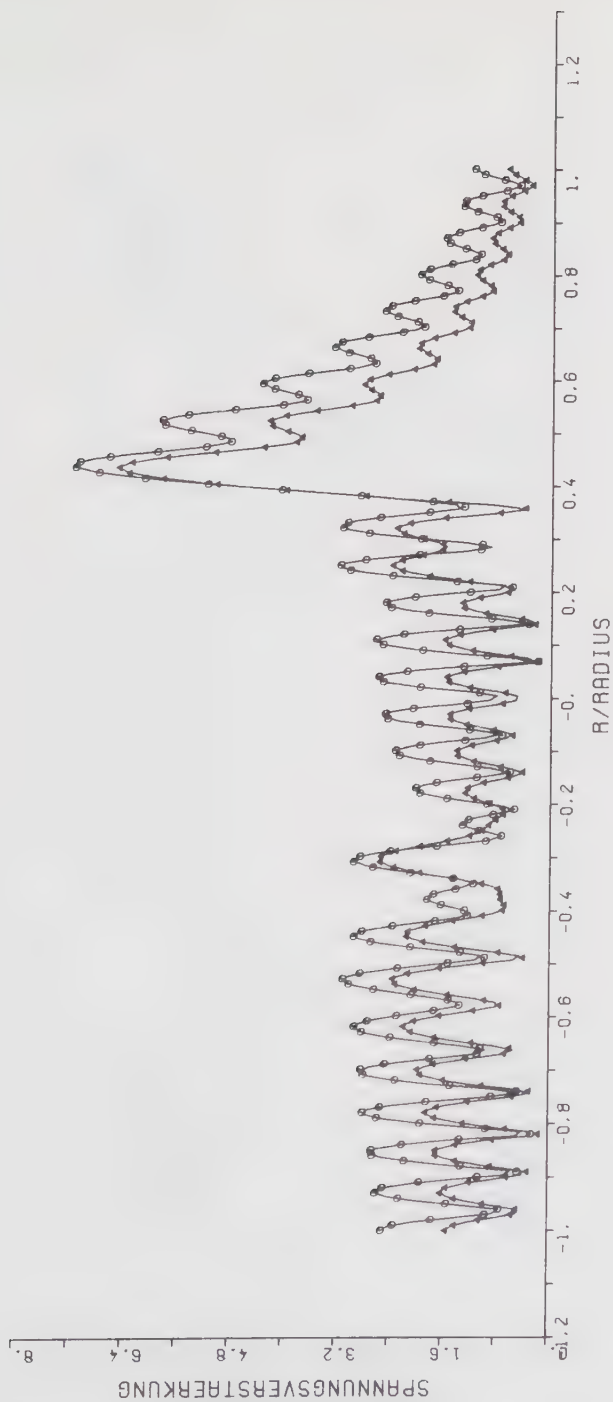
SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP  
der Kompressionswelle allein



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Polystyrol  
 $D/\lambda_c = 10,0$

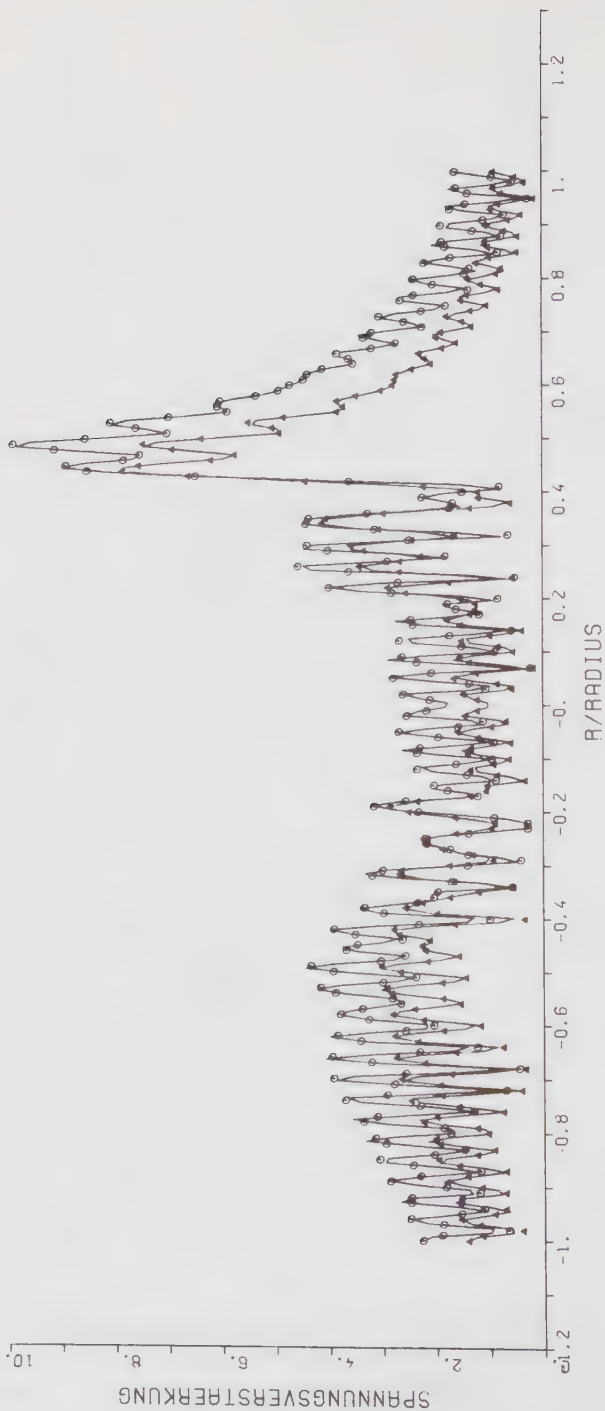
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Kompressionswelle allein



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Polystyrol  
 $D/\lambda_2 : 15,0$

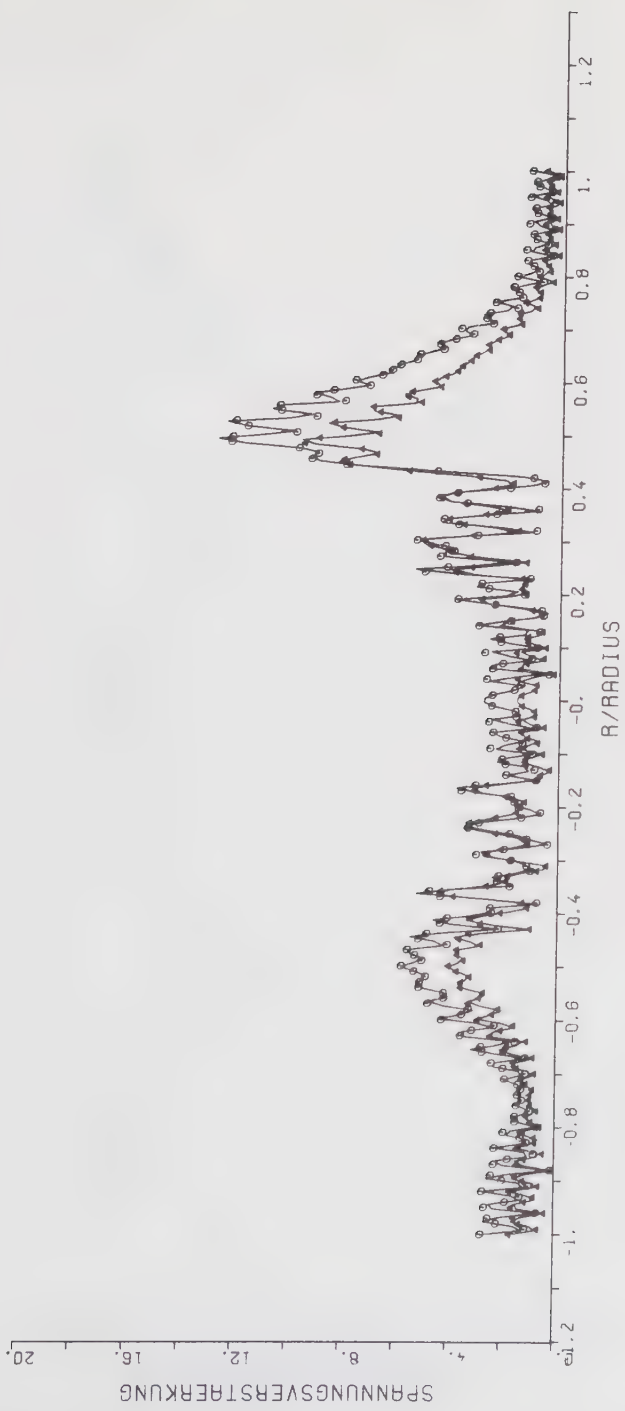
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Kompressionswelle allein



○ SIGMA RR  
△ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Polystyrol  
 $n_{1/2}$  : 30.0

SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP  
der Kompressionswelle allein

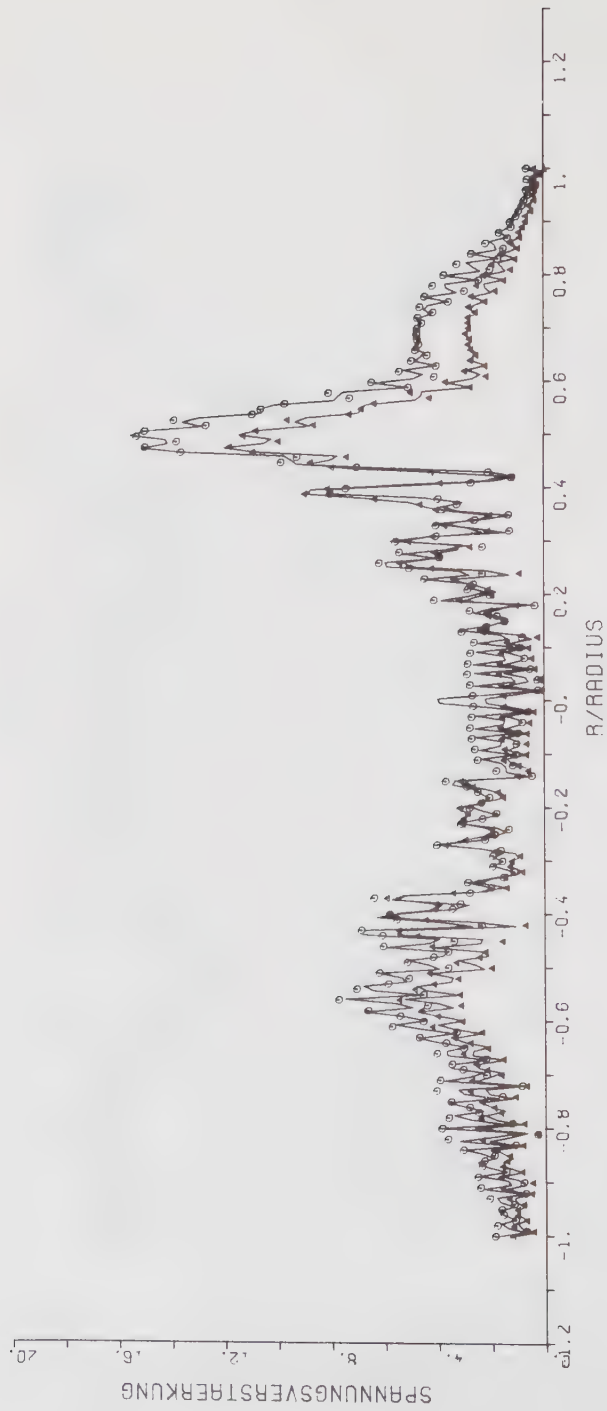


○ SIGMA RR  
△ SIGMA PP

Medium Aluminium  
Kugel Polystyrol  
D/λ<sub>2</sub> 40.0

Abb. 32

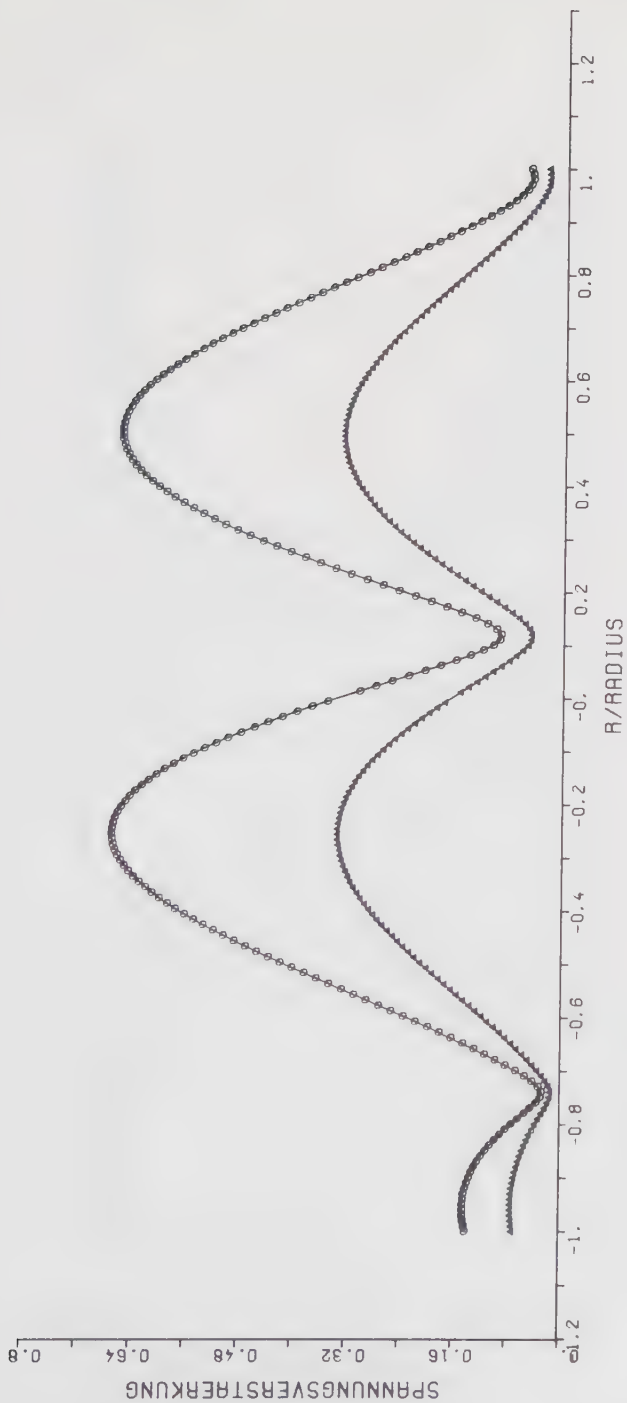
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Kompressionswelle allein



○ SIGMA RR  
△ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Polystyrol  
D/A : 50.0

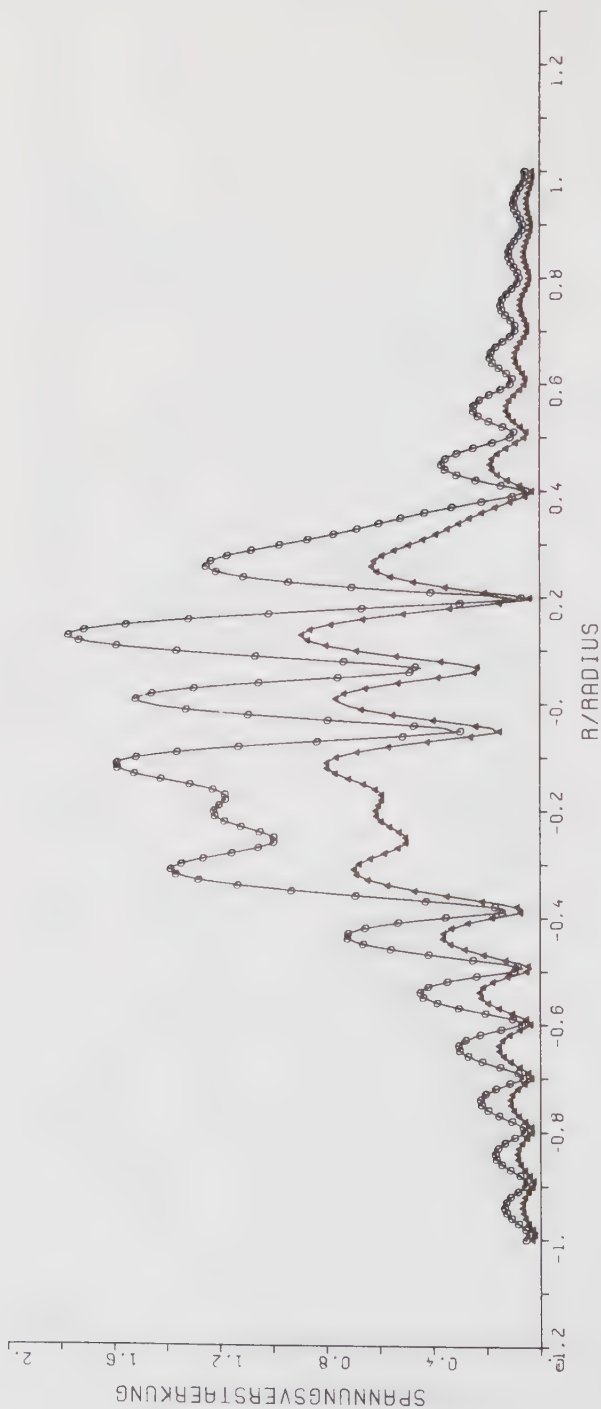
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Scherwelle allein



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel Polystyrol  
 $D/\lambda_2$  1.0

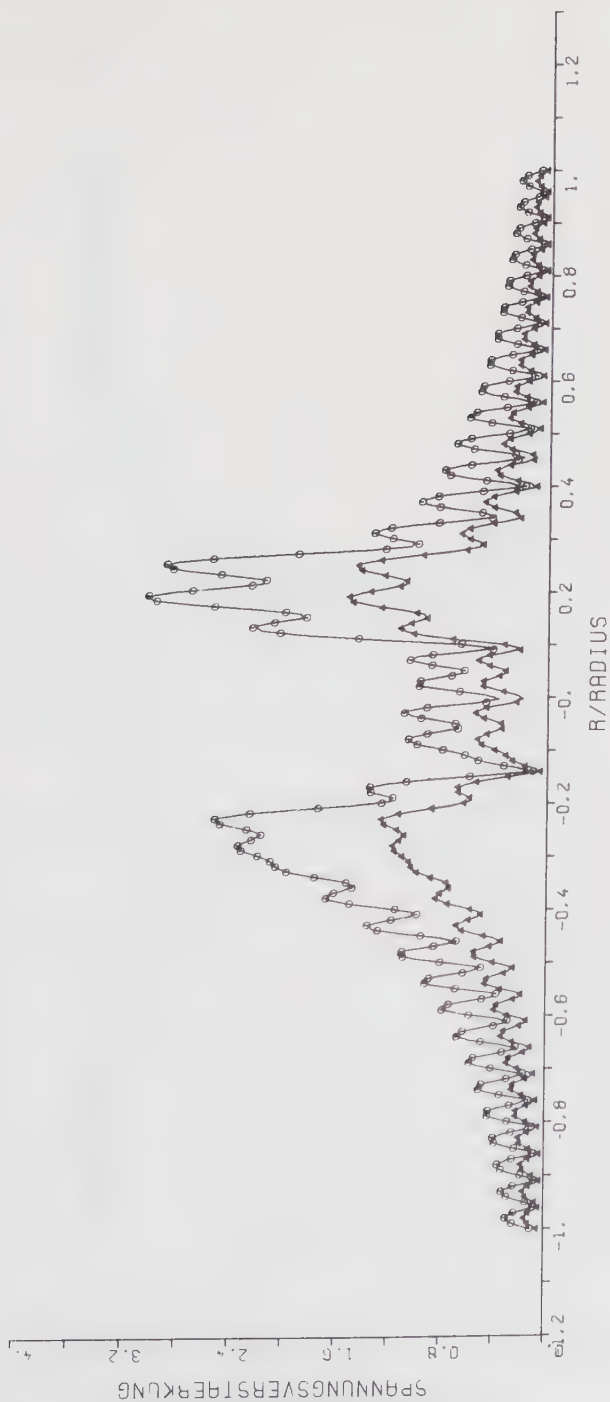
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Scherwelle allein



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Polystyrol  
 $C/R_0$  : 5.0

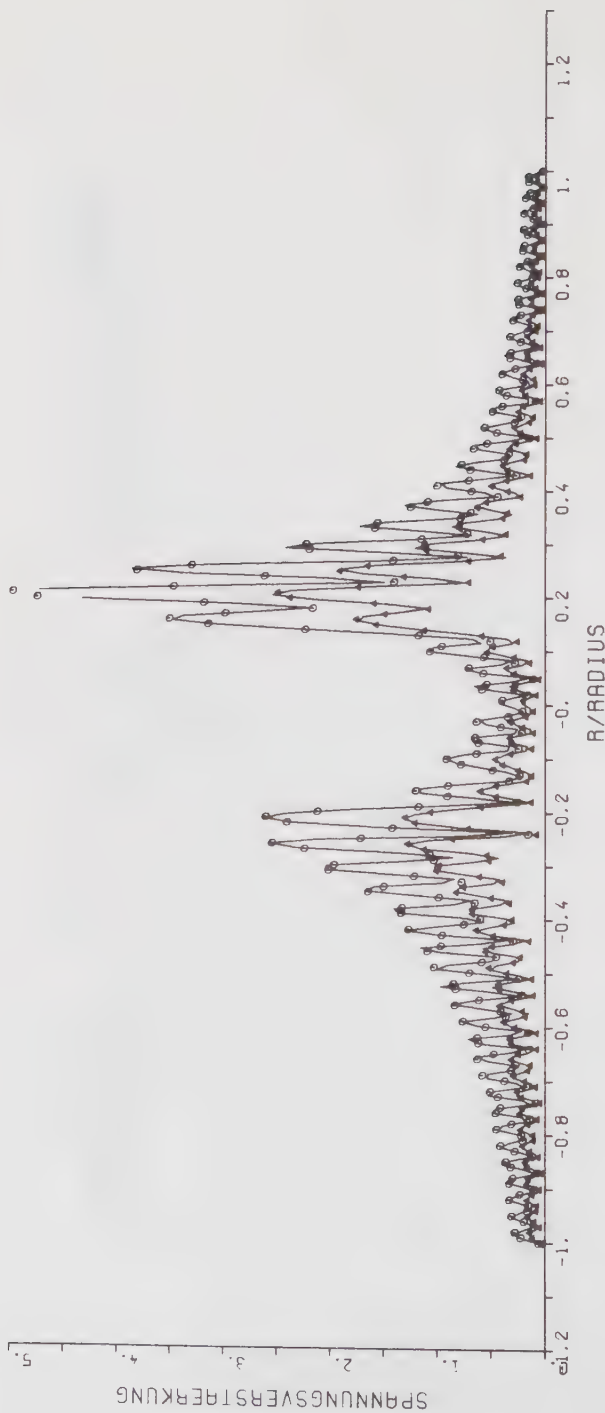
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Scherwelle allein



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Polystyrol  
 $D/\lambda_2$  : 10,0

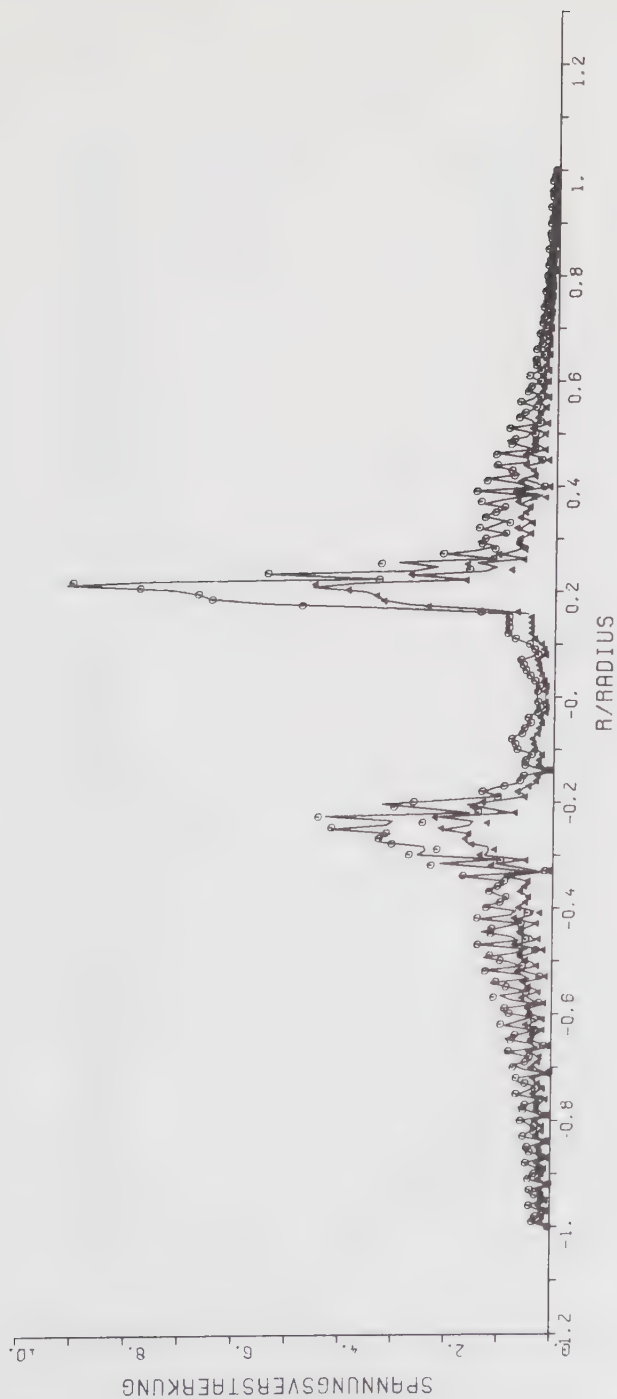
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Scherwelle allein



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Polystyrol  
D / d : 15,0

# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Scherwelle allein



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Polystyrol  
 $D/\lambda_2$  : 30,0

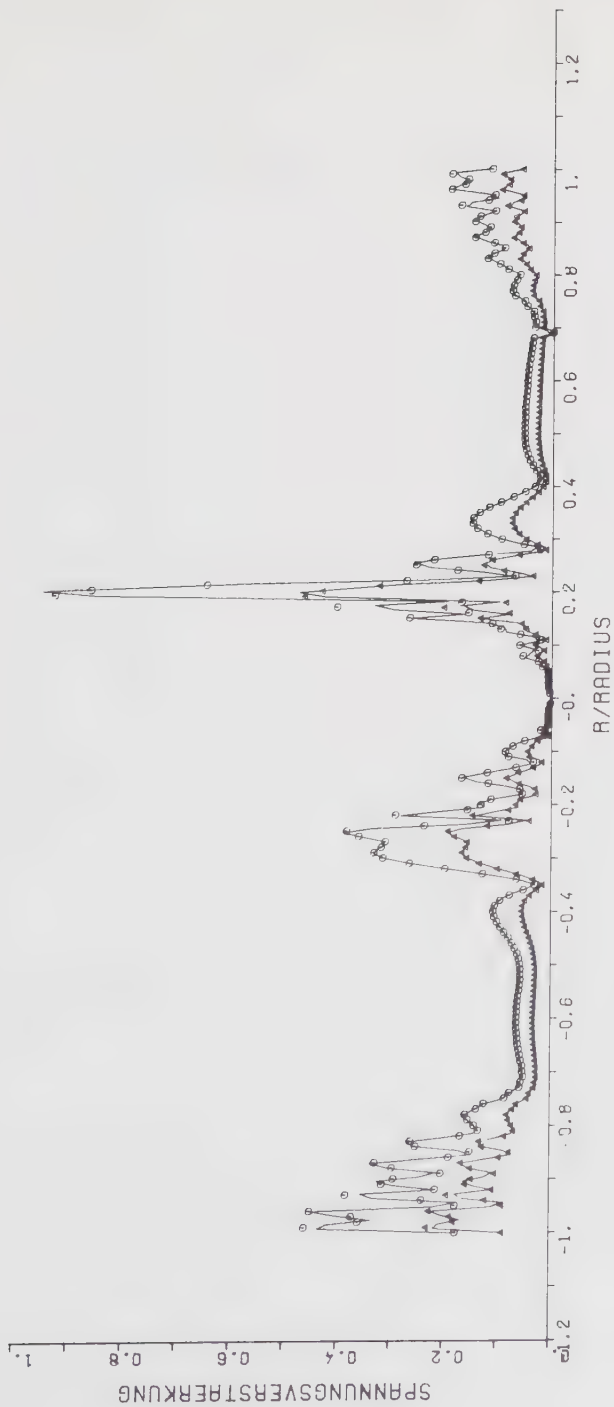
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Scherwelle allein



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

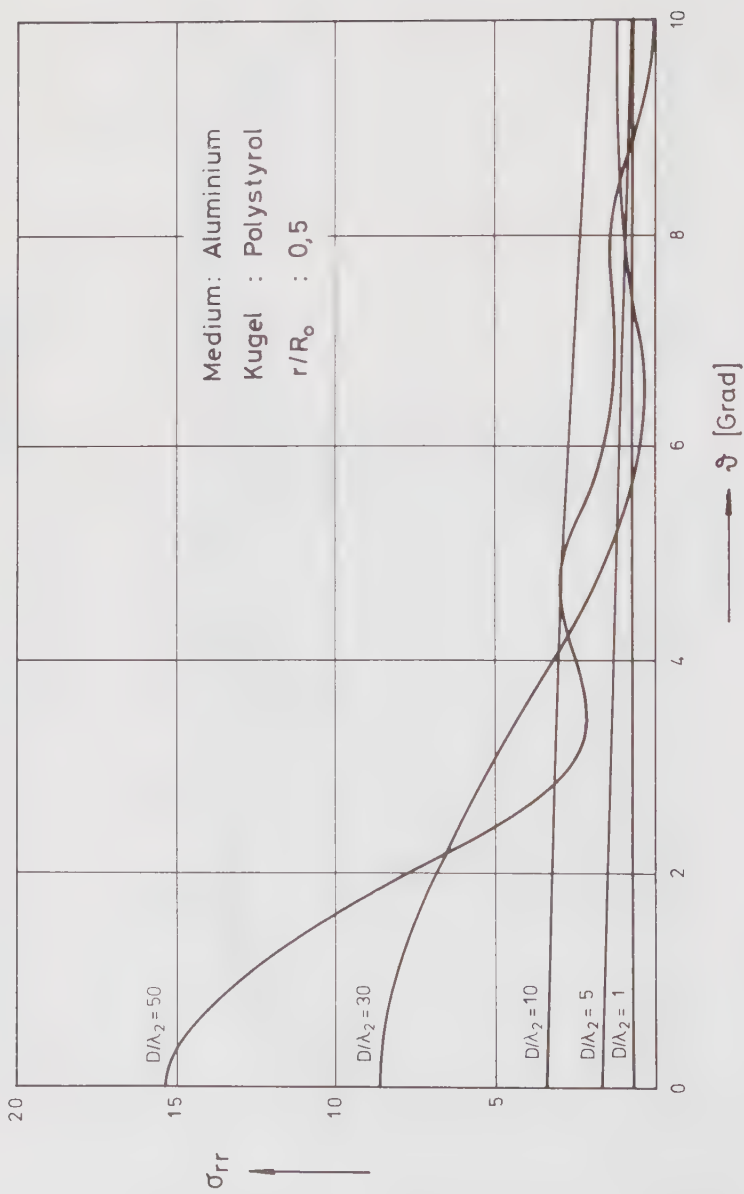
Medium : Aluminium  
Kugel : Polystyrol  
D/λ : 40.0

# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Scherwelle allein

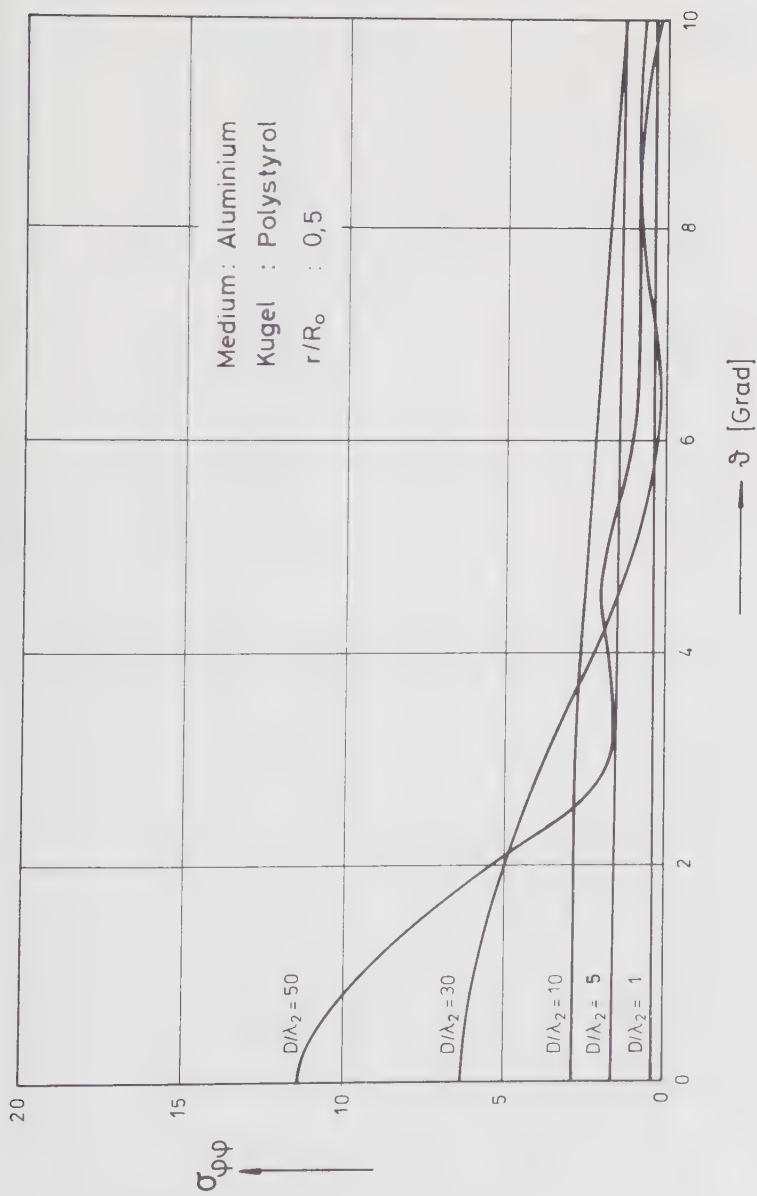


○ SIGMA RR  
△ SIGMA PP

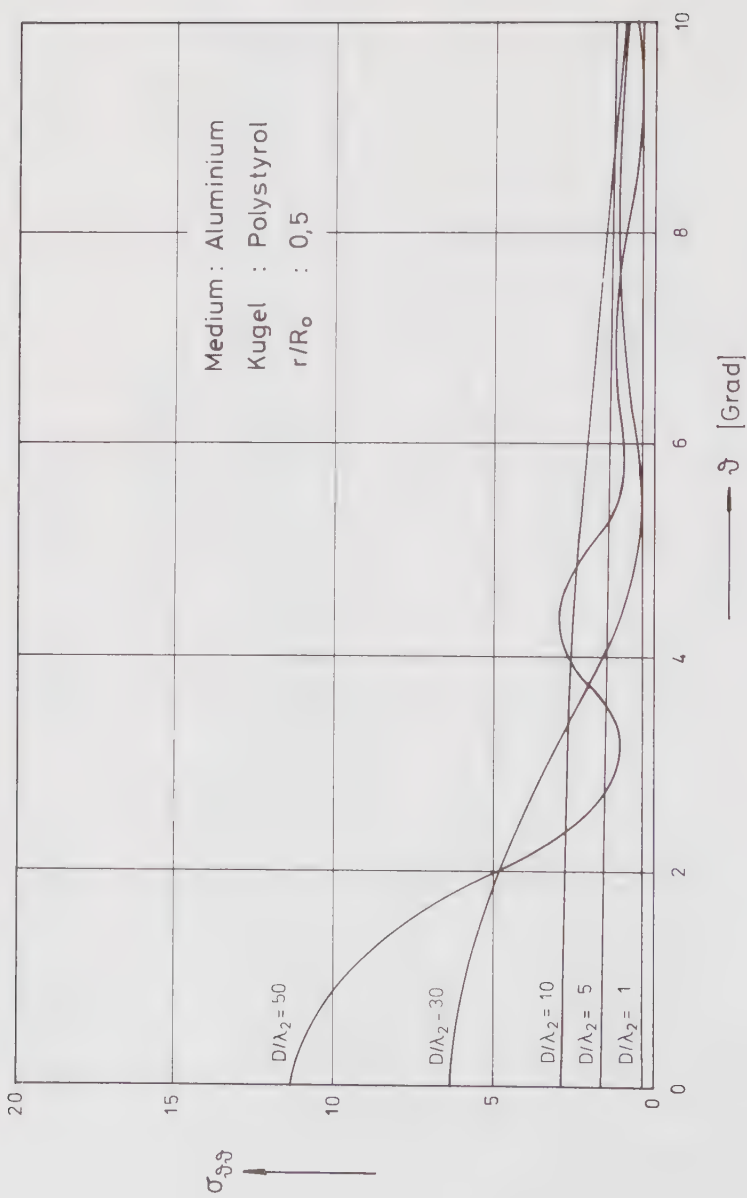
Medium : Aluminium  
Kugel : Polystyrol  
 $D/\lambda_2$  : 50,0



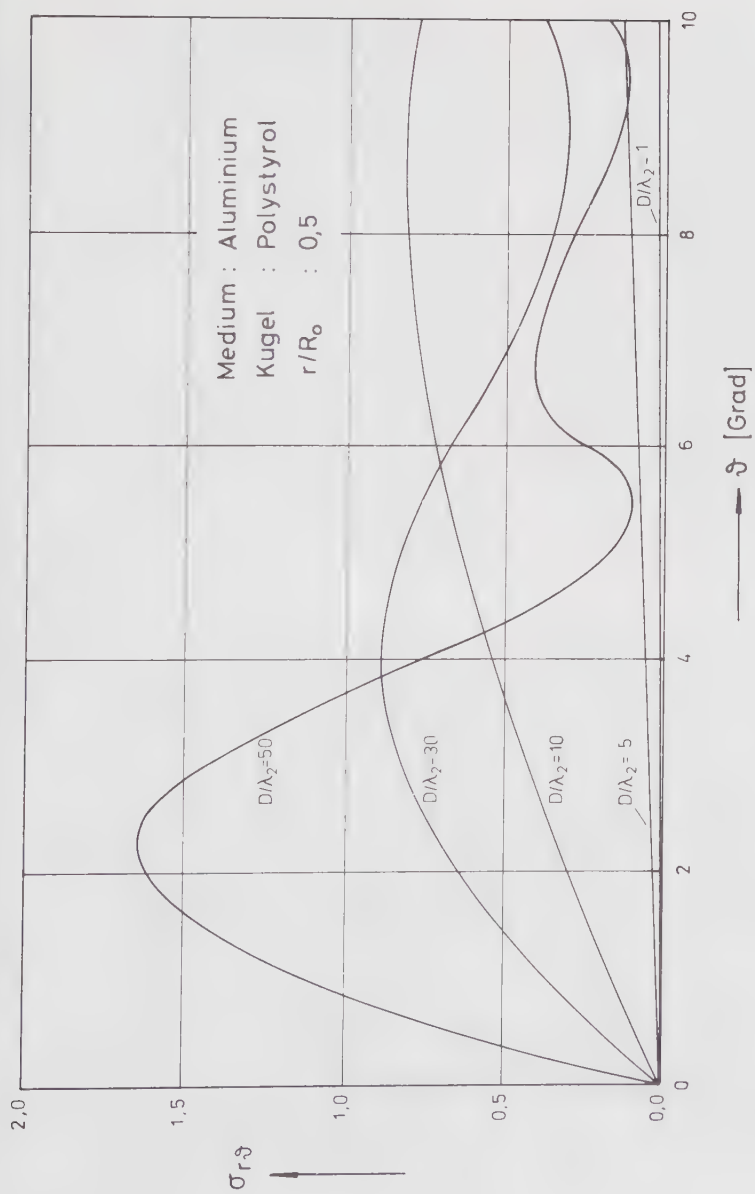
Normierter Betrag der Spannung  $\sigma_{rr}$  im Fokus der Kompressionswelle als Funktion des Winkels  $\vartheta$



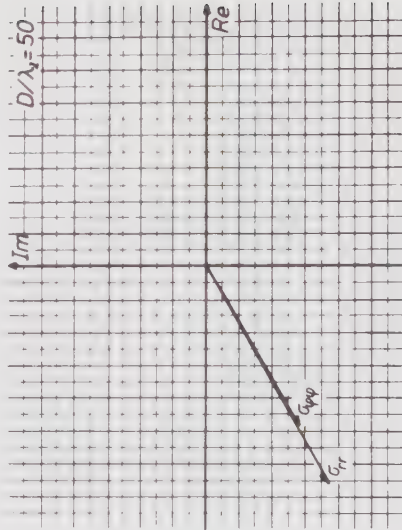
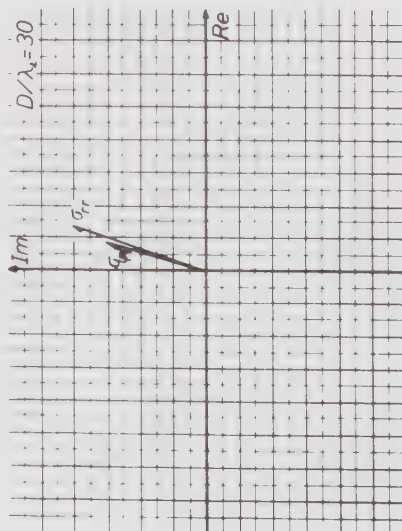
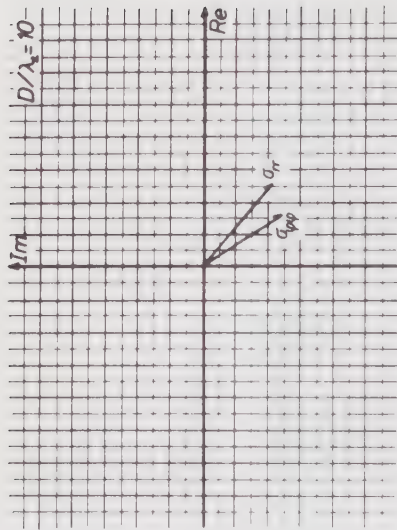
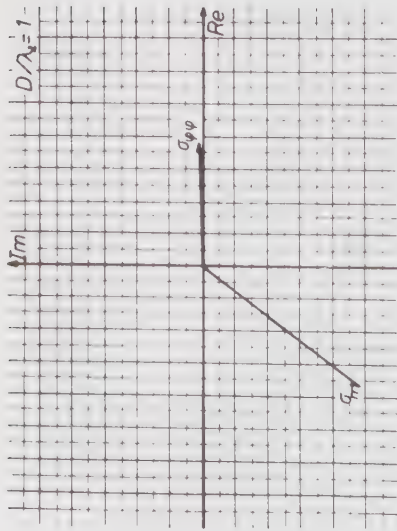
Normierter Betrag der Spannung  $\sigma_{\phi\phi}$  im Fokus der Kompressionswelle als Funktion des Winkels  $\phi$



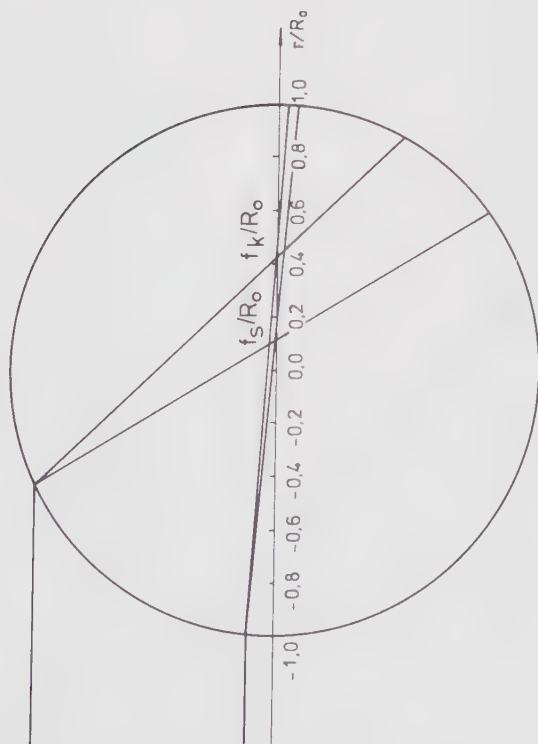
normierter Betrag der Spannung  $\sigma_{\theta\theta}$  im Fokus der  
„Compressionswell“, als Funktion des Winkels  $\theta$



Normierter Betrag der Spannung  $\sigma_{r\vartheta}$  im Fokus der Kompressionswellen als Funktion des Winkels  $\vartheta$



Lage der Spannungszeiger in der komplexen Spannungsebene



$$n_1 = 2,9$$

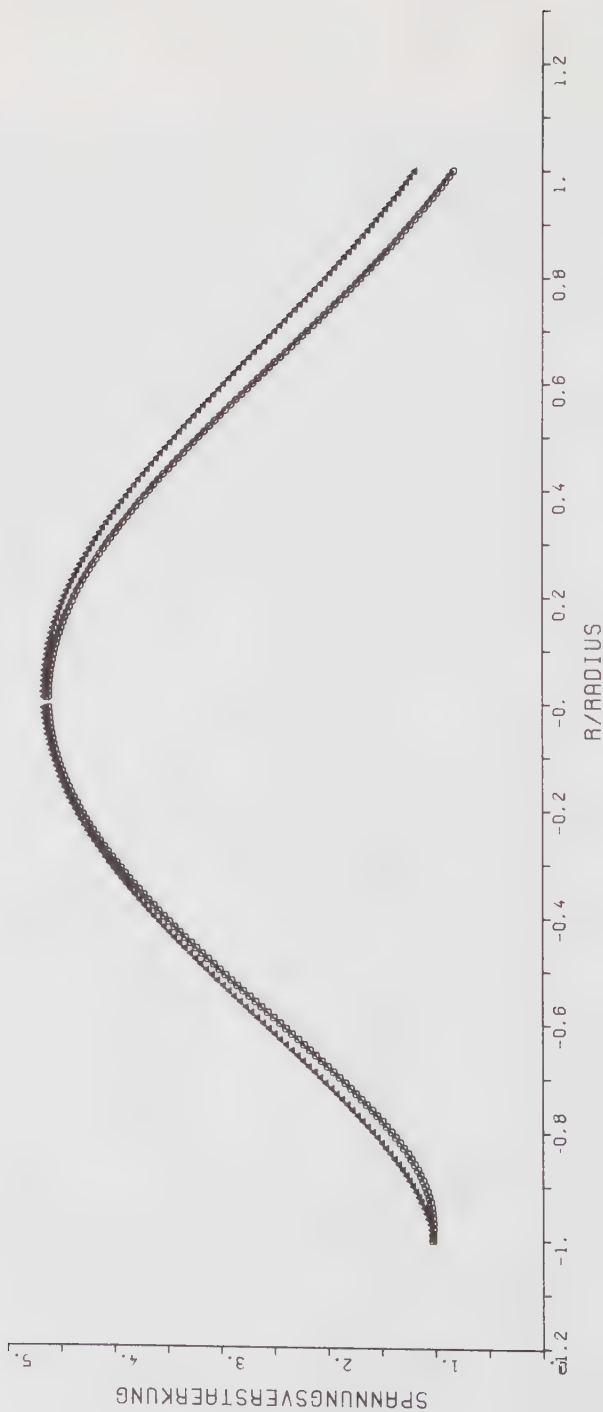
$$0,43 \cong f_k/R_0 \cong 0,53$$

$$n_2 = 9,0$$

$$0,11 \cong f_s/R_0 \cong 0,12$$

Strahlenweg nach dem Brechungsgesetz für Aluminium-Blei

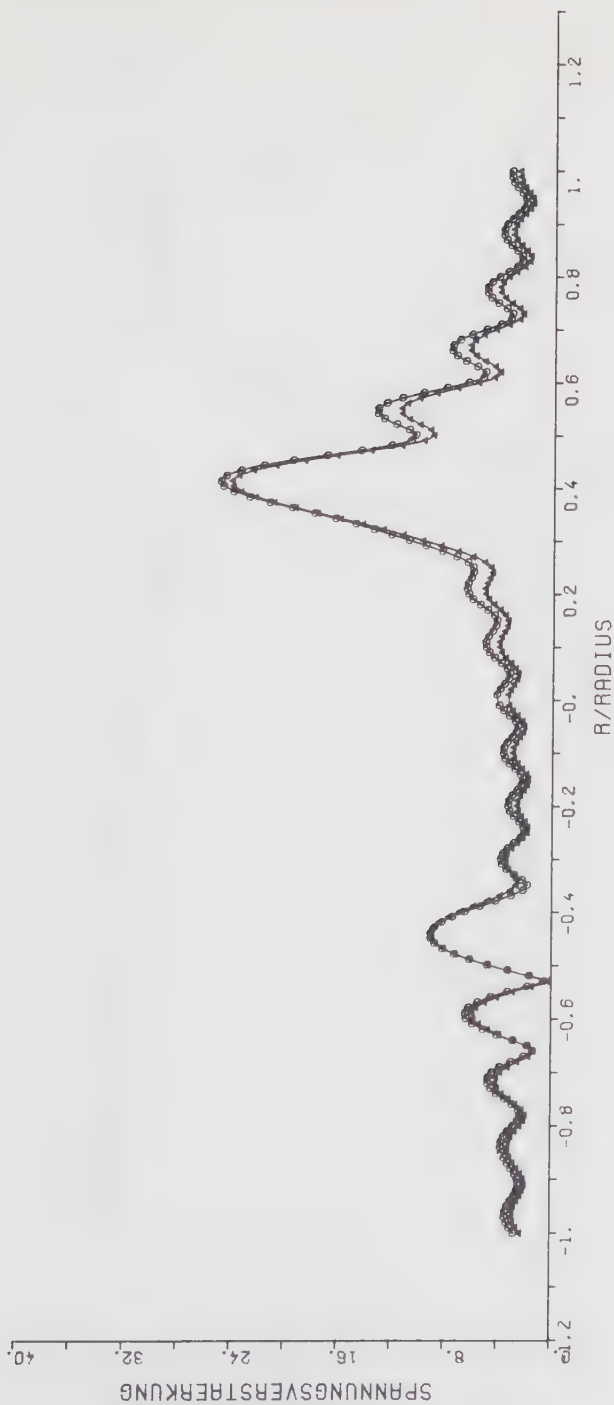
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Kompressionswelle allein



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Blei  
 $D/\lambda_1 : 1.0$

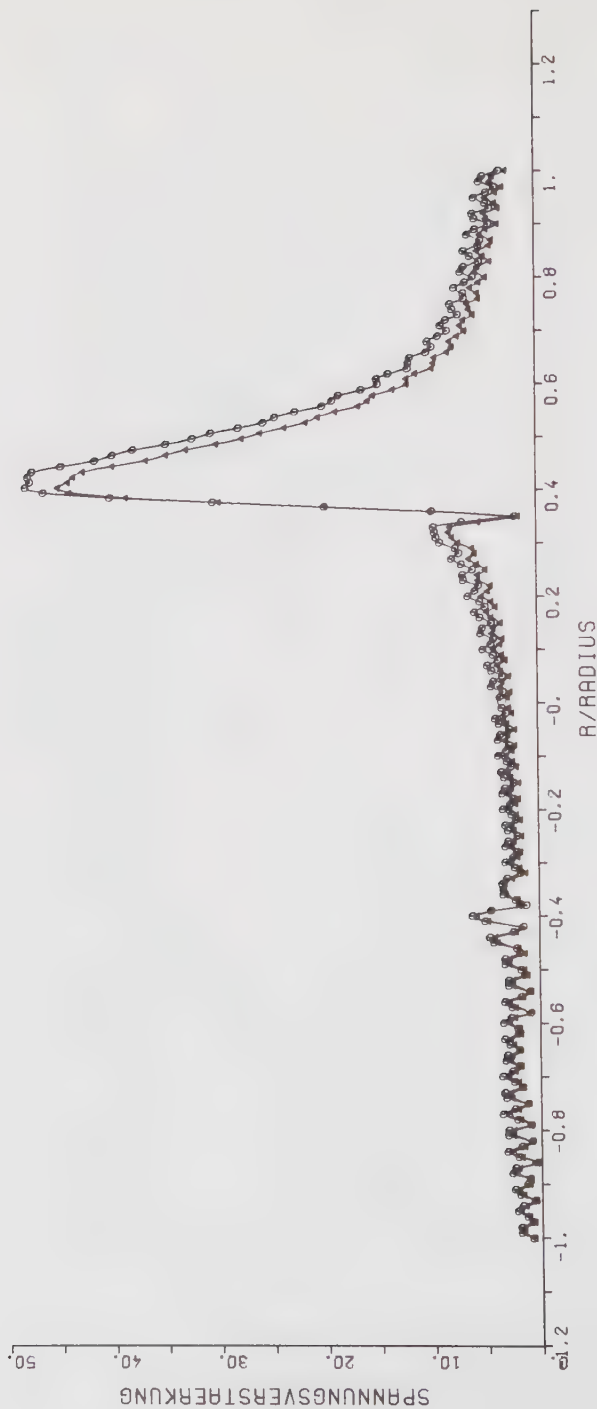
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Kompressionswelle allein



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Blei  
 $D/\lambda_z : 10.0$

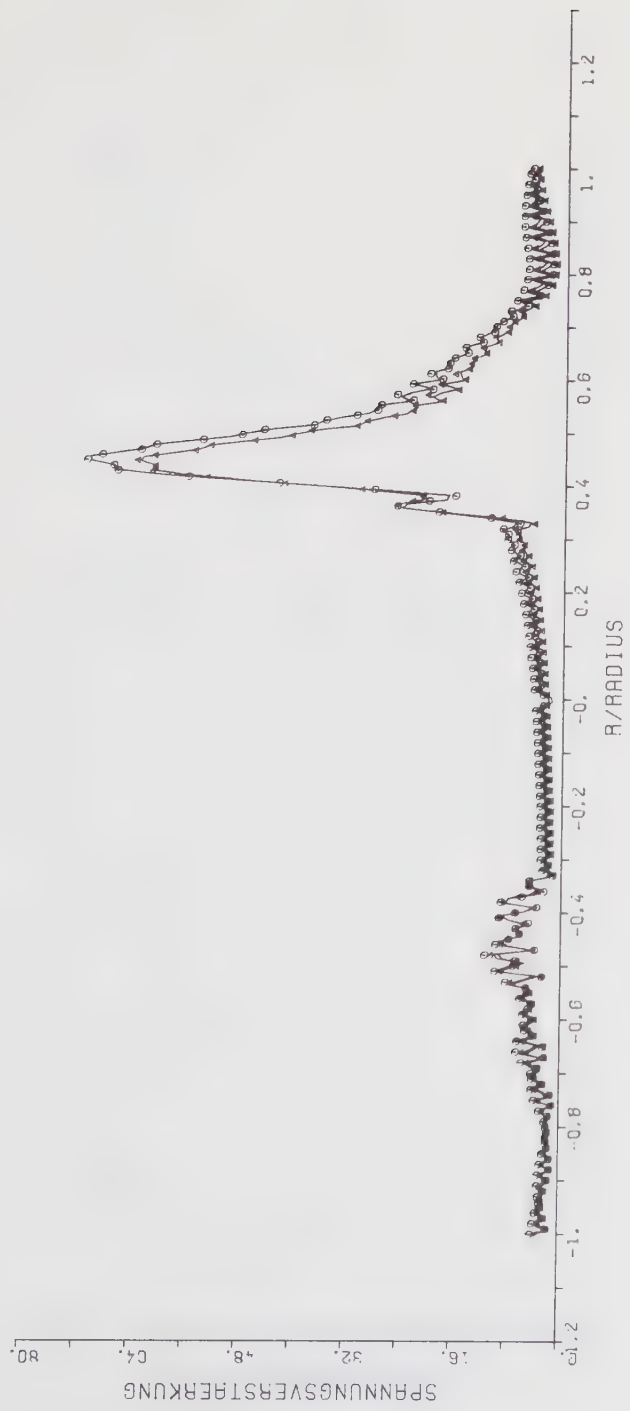
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Kompressionswelle allein



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Blei  
 $D/\lambda_z$  : 30,0

# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Kompressionswelle allein

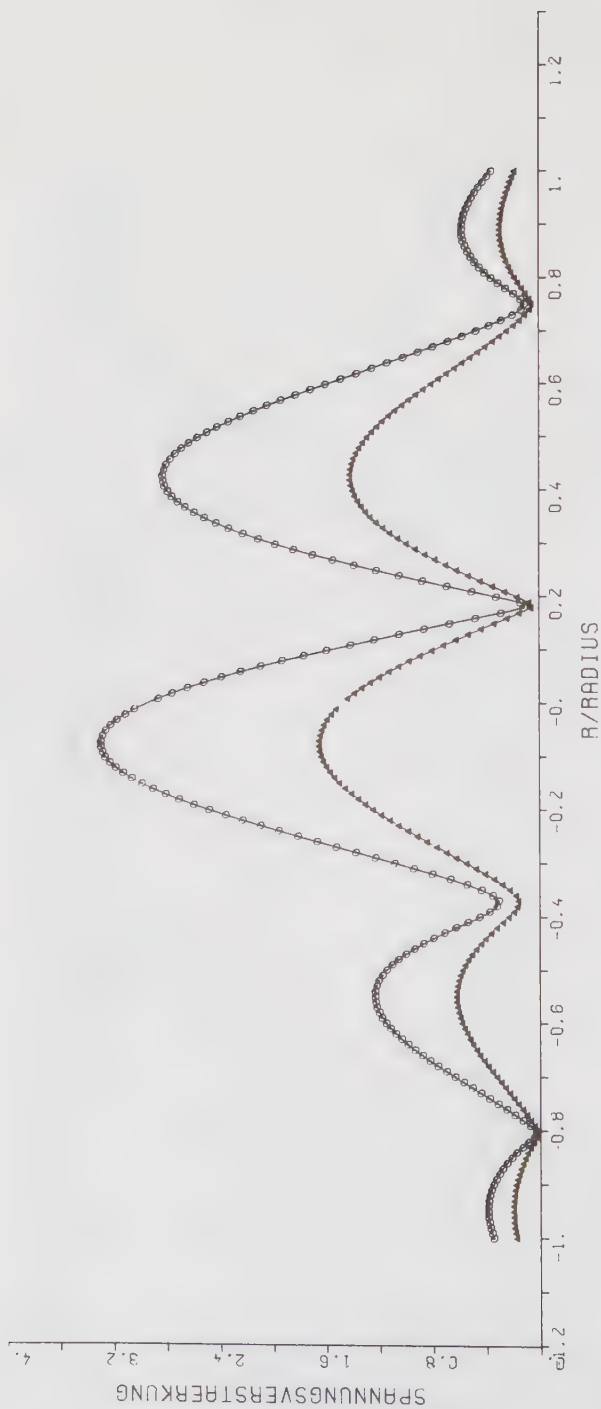


○ SIGMA RR  
△ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Blei  
 $D/\lambda_z$  : 50,0

Abb. 50

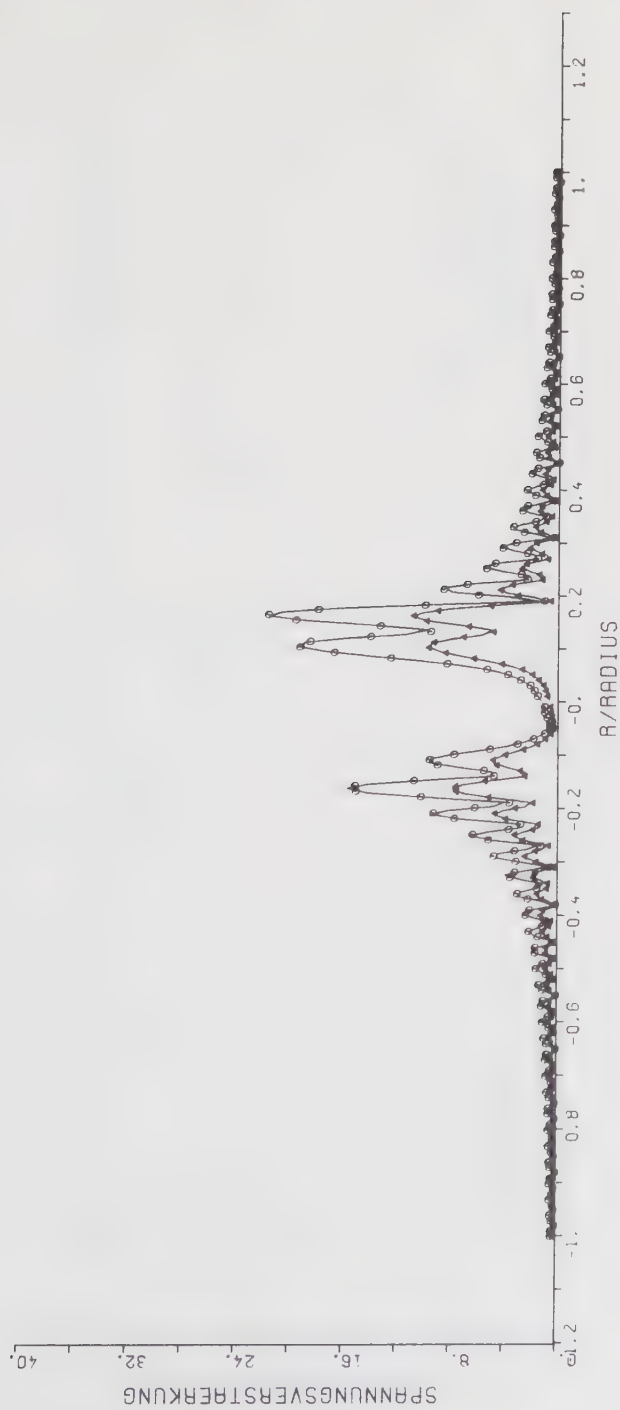
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Scherwelle allein



○ SIGMA RR  
△ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Blei  
D/R 1.0

# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Scherwelle allein



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Blei  
 $D/\lambda_s$  : 10.0

Abb. 52

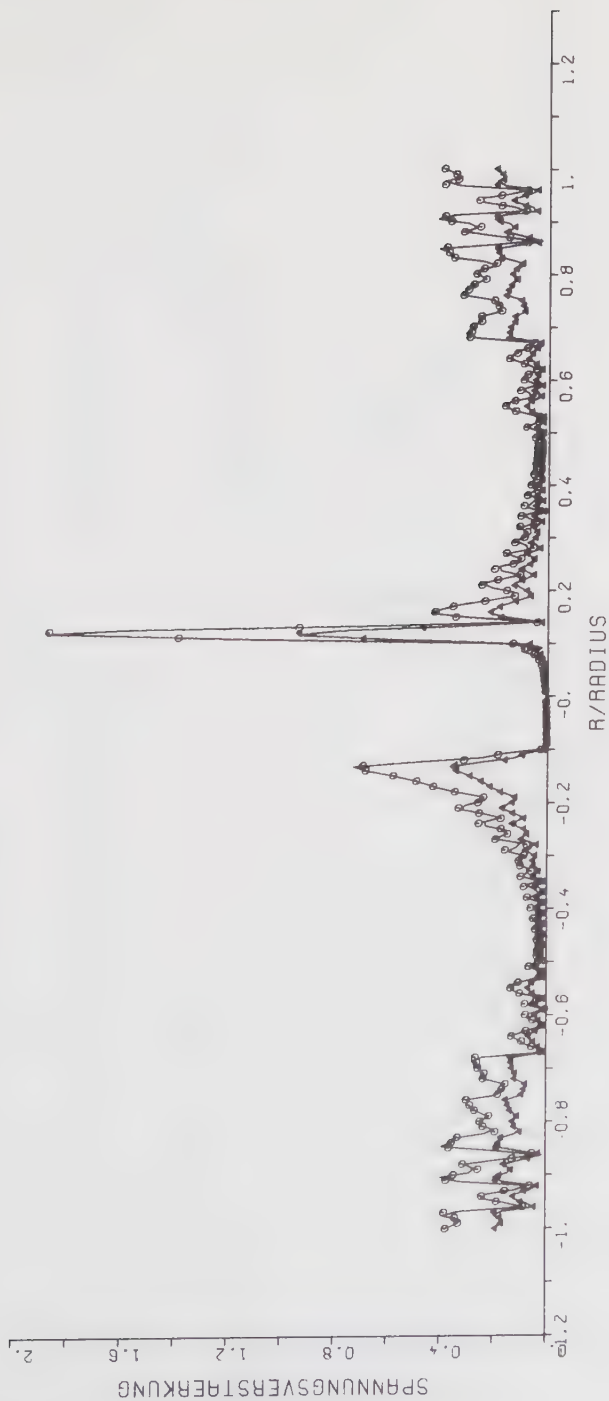
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SILICA RR UND PP der Scherwelle allein



○ SIGMA RR  
△ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Blei  
 $D/\lambda_c$  : 30.0

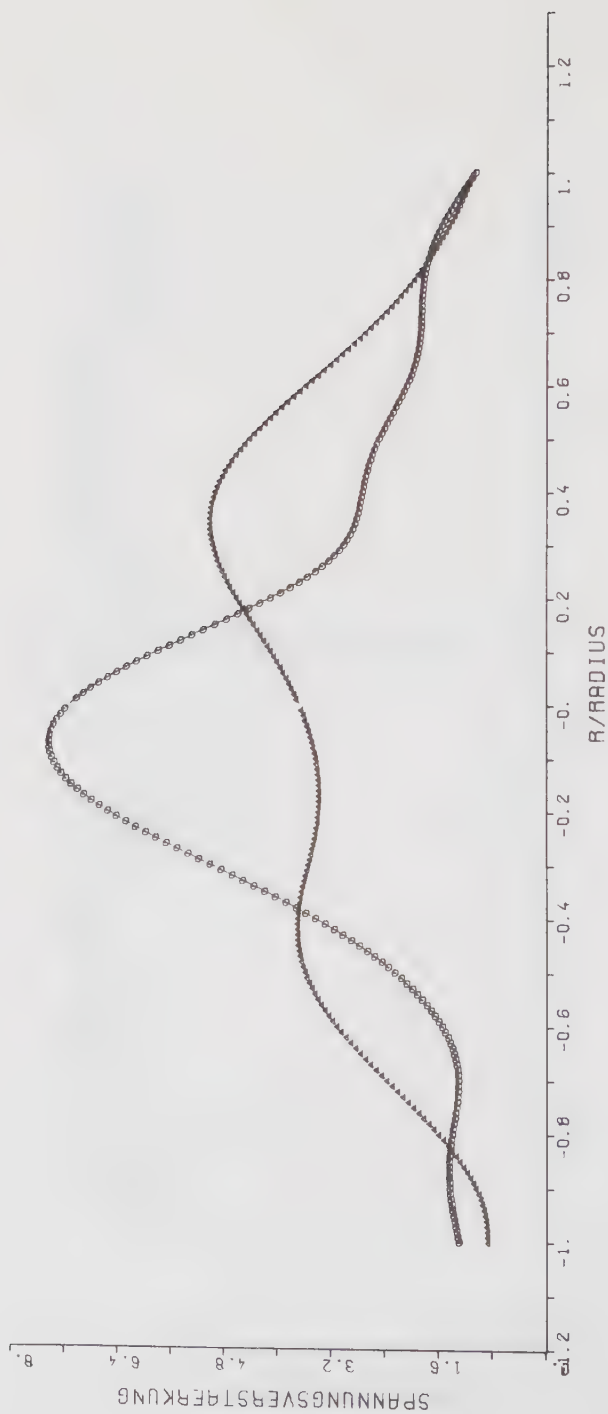
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP der Scherwelle allein



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

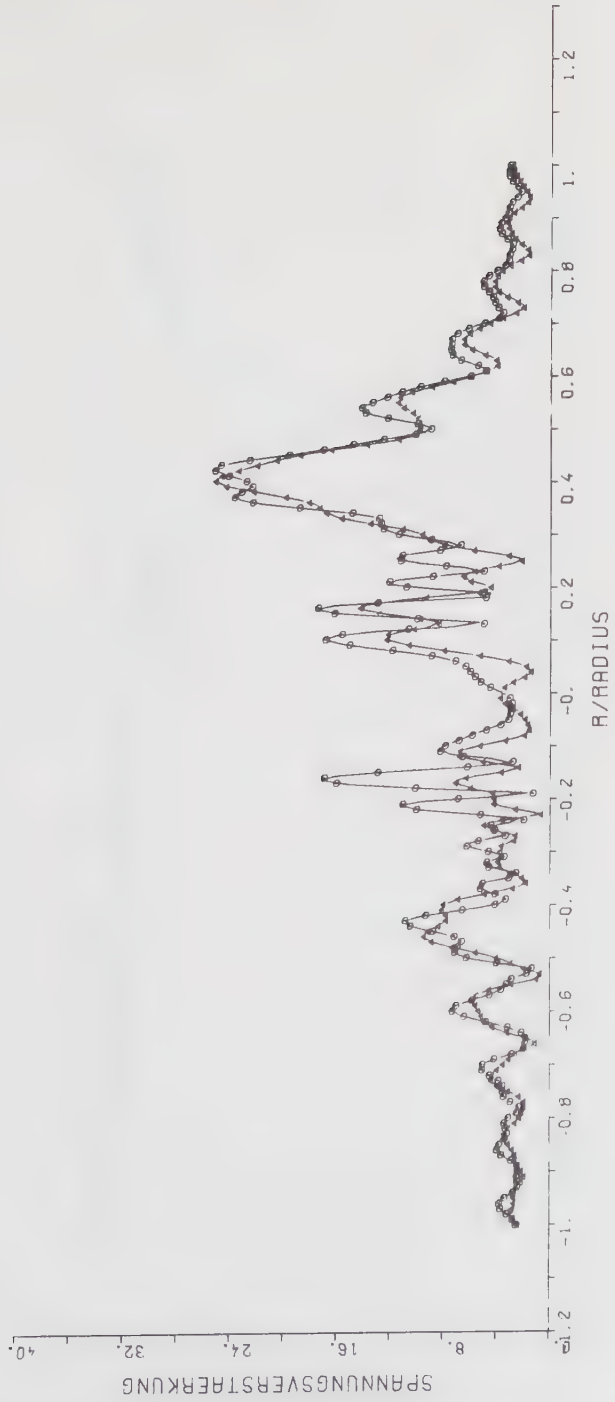
Medium : Aluminium  
Kugel : Blei  
 $D/\lambda_z$  50.0

# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP



□ SIGMA RR  
 ▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
 Kugel : Blei  
 $D/\lambda_1$  : 1.0

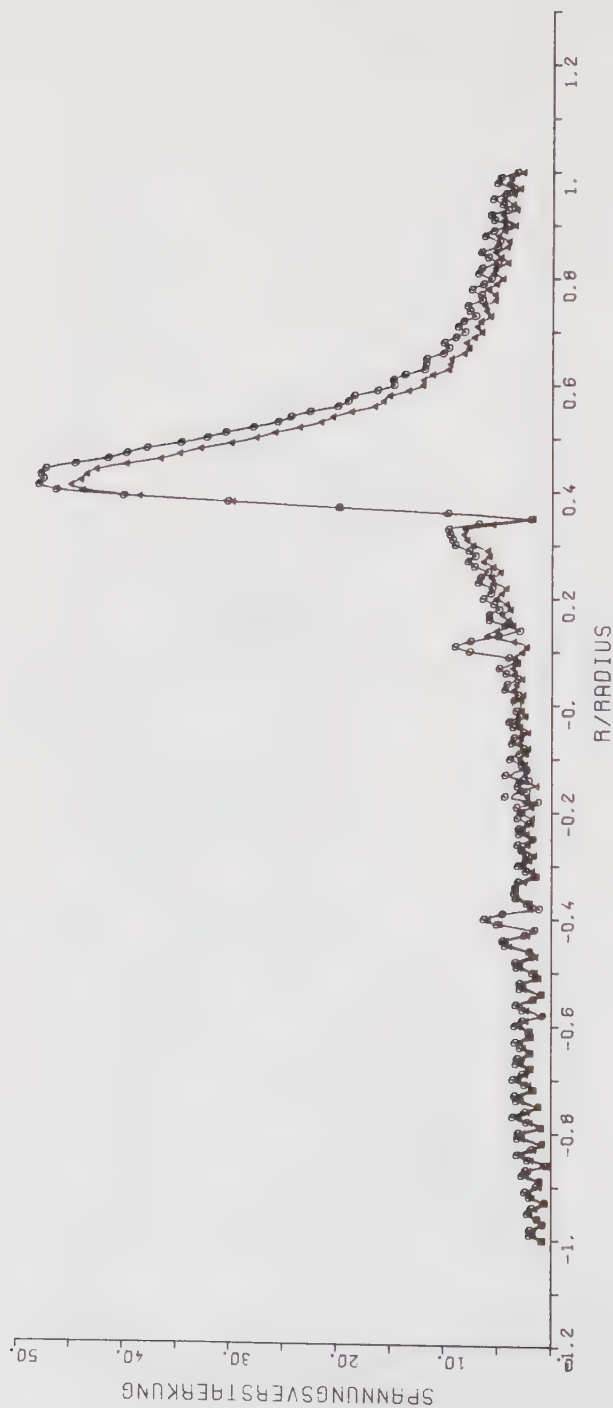


○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Blei  
 $D/\lambda_2$  : 10,0

Abb. 56

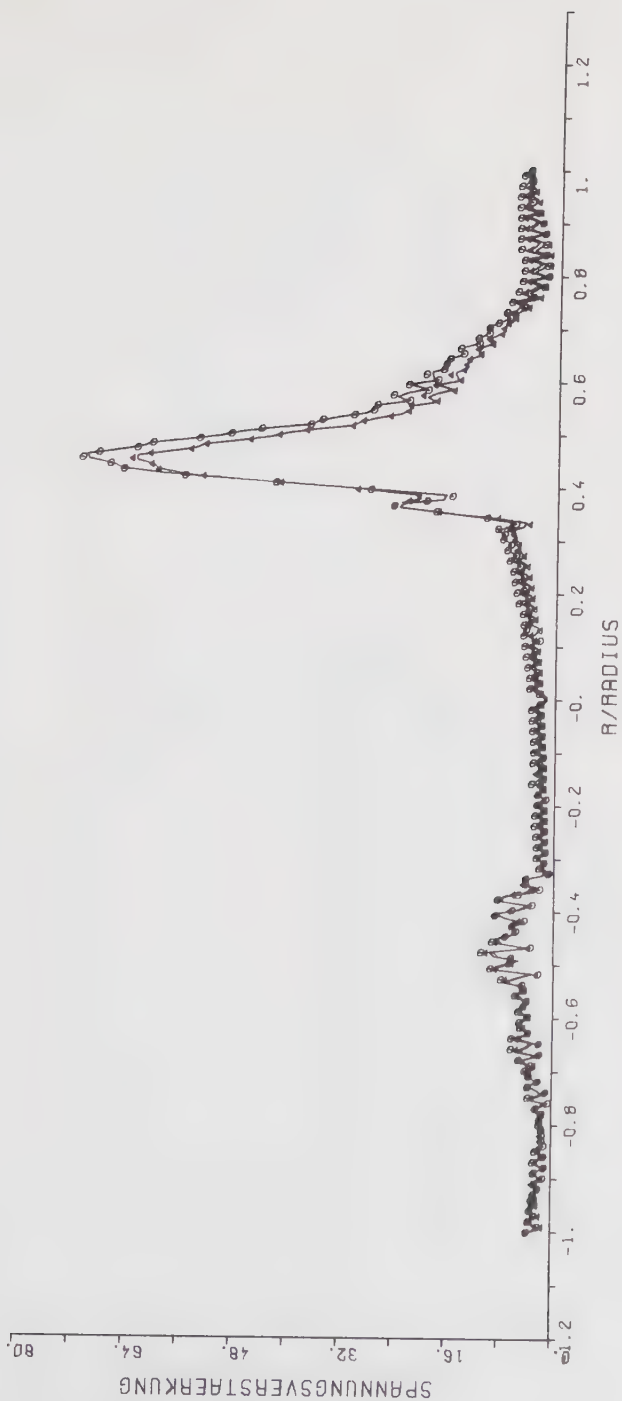
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

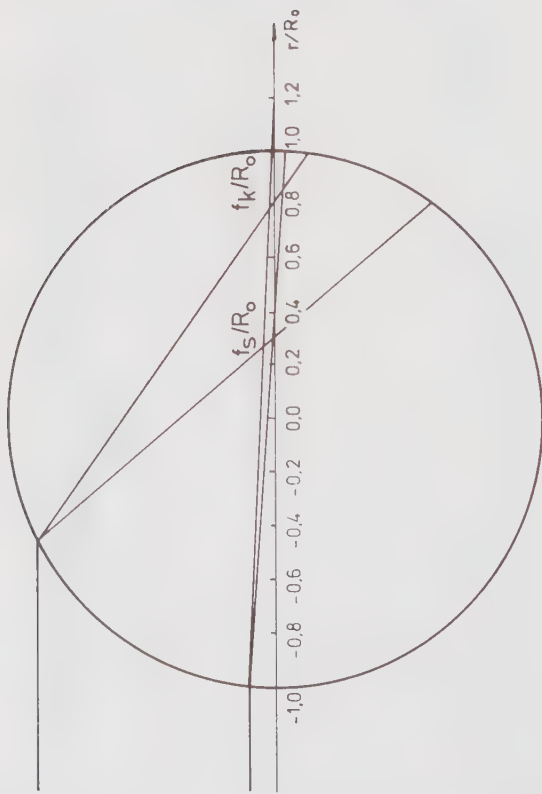
Medium : Aluminium  
Kugel : Blei  
 $D/\lambda_d$  : 30.0

# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA AA UND PP



○ SIGMA AA  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Blei  
 $D/\lambda_z$  : 50,0



$$n_1 = 1,9$$

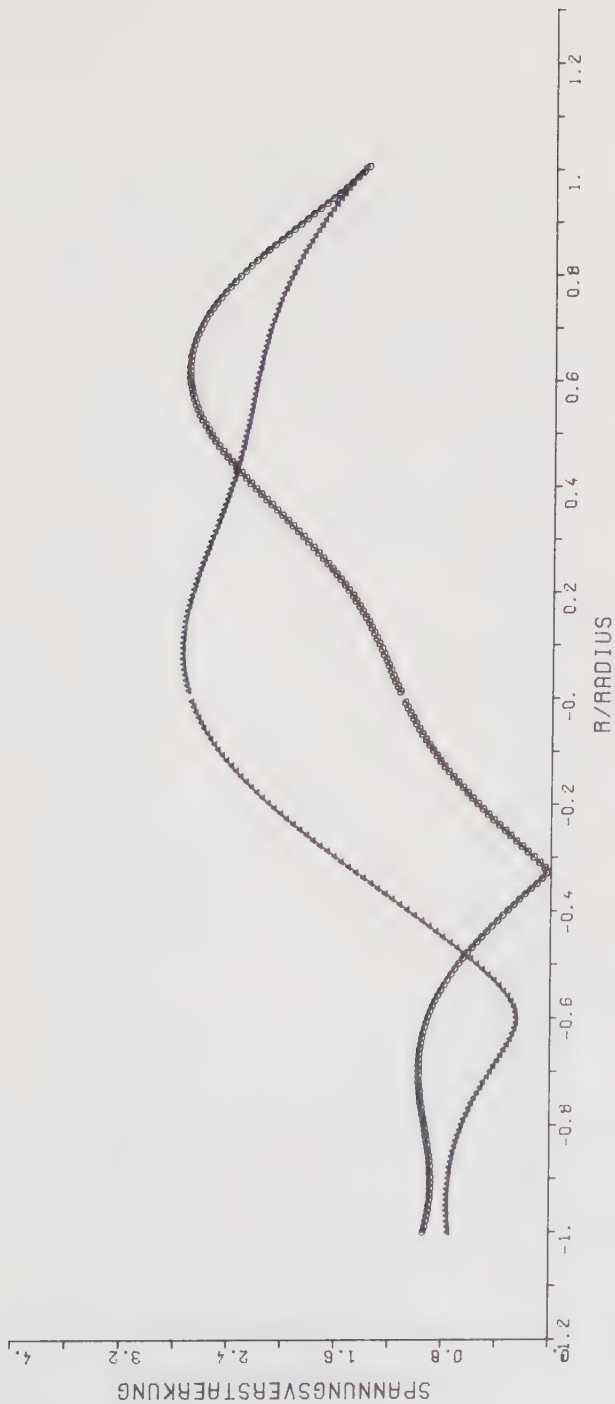
$$0,81 \cong f_k / R_0 \cong 1,18$$

$$n_2 = 3,8$$

$$0,31 \cong f_s / R_0 \cong 0,36$$

Strahlengang nach dem Brechungsgesetz für Aluminium-Zinn

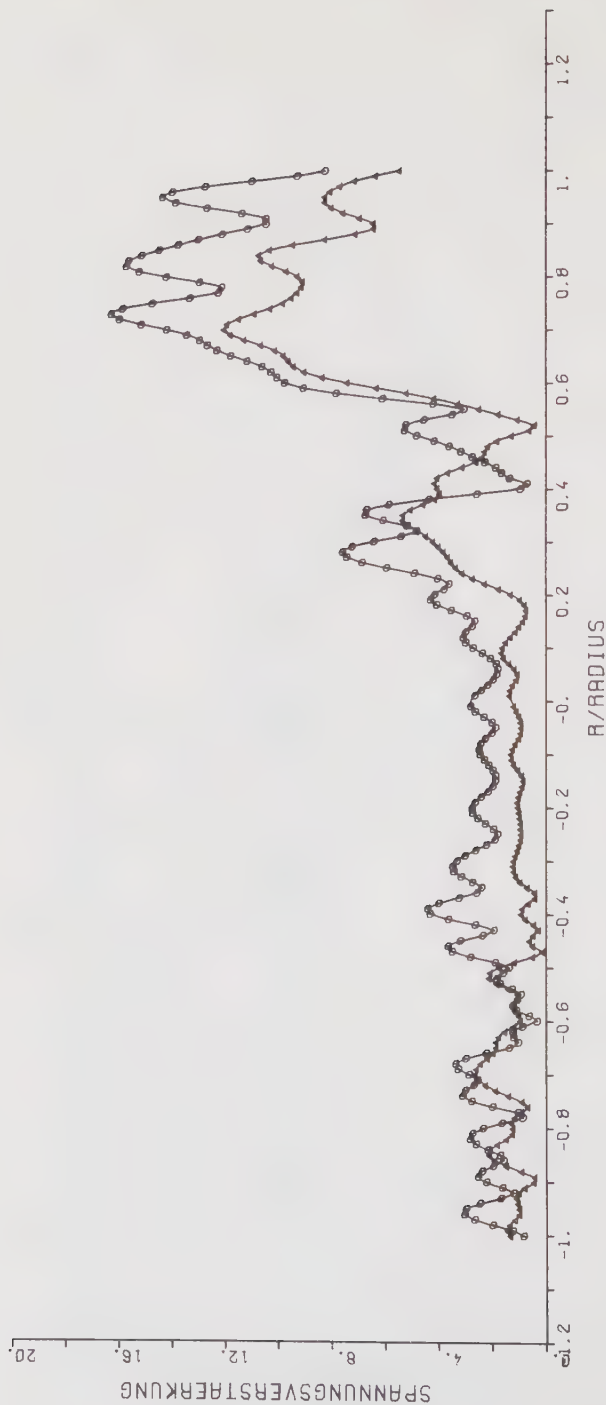
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Zinn  
 $D/\lambda_z$  : 1.0

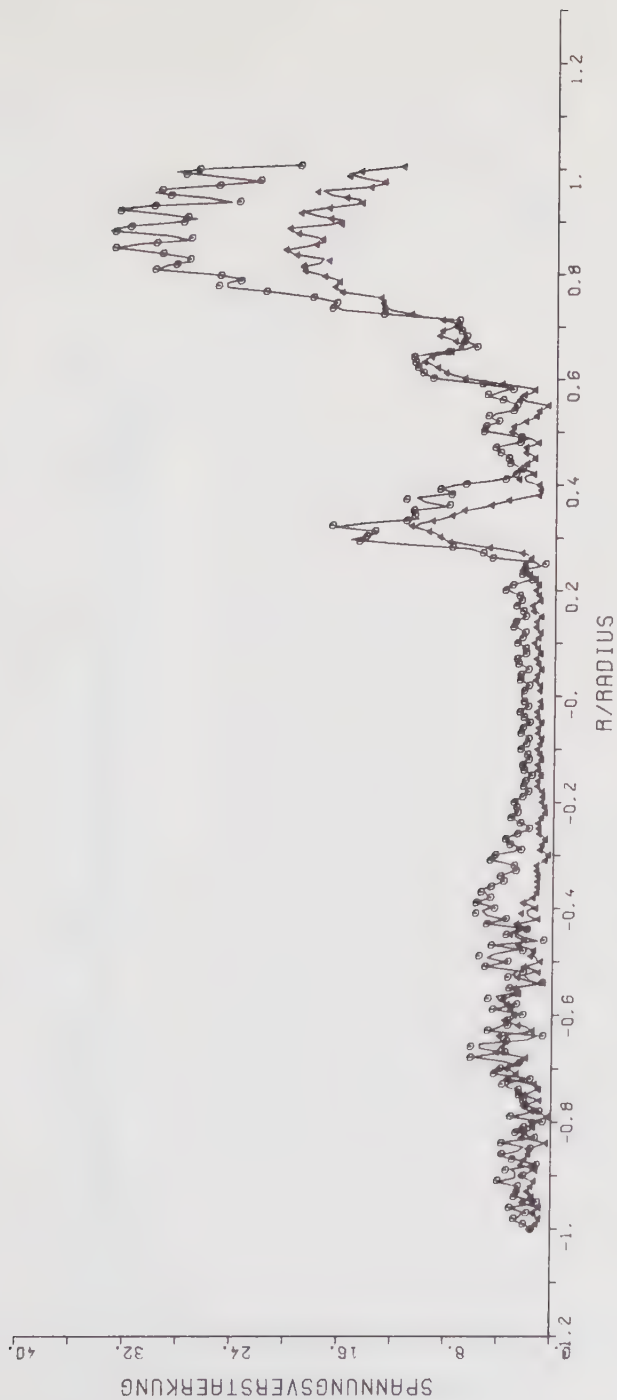
# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Zinn  
 $D/\lambda_1$  : 10.0

# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP



○ SIGMA RR  
▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
Kugel : Zinn  
 $D/\lambda_2$  : 30,0

# SPANNUNGSVERTEILUNG VON SIGMA RR UND PP



○ SIGMA RR  
 ▲ SIGMA PP

Medium : Aluminium  
 Kugel : Zinn  
 $D/\lambda_s$  : 50.0

## Lebenslauf

Klaus Müller, geboren am 7. Januar 1949 in Witten/Ruhr.

- |             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1955 - 1959 | Besuch der Volksschule in Wuppertal und Hagen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 1959 - 1967 | Besuch des mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasiums in Hagen bis zur Reifeprüfung am 4. Juli 1967                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 1967 - 1972 | Studium der Elektrotechnik an der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen bis zur Diplom-Hauptprüfung am 4. Oktober 1972.<br>Fachrichtung Energietechnik mit Schwerpunkt Reaktortechnik.<br>Vor und während der Studienzeit Industriepraktika bei den Stahlwerken Südwestfalen AG, Hagen, bei dem Kommunalen Elektrizitätswerk Mark AG, Hagen, und bei der Klöckner-Moeller GmbH., Hagen. |
| Seit 1973   | Zunächst Wissenschaftlicher Angestellter, später Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Reaktortechnik der Ruhr-Universität Bochum (Lehrstuhlinhaber: Prof. Dr. rer. nat. A. Ziegler).                                                                                                                                                                                                           |





